А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Том 52, вып. 4

(Журнал основан в 1936 г. Выходит 6 раз в год. Москва)

Июль — Август

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА — 1988

СОДЕРЖАНИЕ

Адрес редакции:

117526 Москва, В-526, просп. Вернадского, 101. Тел. 434-21-49

Зав. редакцией А. А. Дудина

Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 4, 1988

УДК 531.01

О ГРУППАХ СИММЕТРИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Козлов В. В.

Рассматривается задача о существовании векторных полей, определенных во всем фазовом пространстве и коммутирующих с векторным полем исходной системы. Фазовые потоки этих полей являются, как известно, группами симметрий динамической системы: они переводят множество всех ее решений в себя. Указаны препятствия к наличию нетривиальных групп симметрий: рождение большого числа невырожденных периодических решений и трансверсальное пересечение асимптотических поверхностей. Детально исследована задача о группах симметрий систем «нормального» вида, играющих важную роль в теории возмущений. Результаты общего характера применены к гамильтоновым системам. Доказано, что уравнения вращения тяжелого несимметричного твердого тела с неподвижной точкой не имеют нетривиальной группы симметрий, если центр масс тела не совпадает с точкой подвеса. В частности, отсутствует дополнительный многозначный аналитический интеграл, независимый с классическими интегралами энергии и площадей.

1. Группы симметрий. Рассмотрим динамическую систему, заданную дифференциальным уравнением

$$dx/dt = v(x) \tag{1.1}$$

Векторное поле u, коммутирующее с полем v ($[u, v] \equiv 0$, где $[,]$ — коммутатор векторных полей), называется полем симметрий системы (1.1). Фазовый поток системы

$$dx/d\tau = u(x) \tag{1.2}$$

— однопараметрическая группа преобразований g_u^τ — переводит решения системы (1.1) в решения той же системы.

Наличие группы симметрий упрощает исследование динамической системы. Факторизацией по орбитам группы g_u порядок системы уравнений (1.1) понижается на единицу. Эта операция осуществима, по крайней мере, локально в каждой достаточно малой окрестности неособой точки поля u. Правда, конструктивное понижение порядка упирается в задачу отыскания орбит (траекторий) системы дифференциальных уравнений (1.2). Пусть имеется еще одно поле симметрий w и $[u, w] = \lambda w$. Тогда порядок системы (1.1) понижается на две единицы. Наконец, если система n уравнений допускает разрешимую группу симметрий размерности $n - 1$, то эта система интегрируется в квадратурах (теорема Ли [1, 2]).

Согласно теореме о выпрямлении, в малой окрестности неособой точки векторного поля v система (1.1) имеет n-мерную абелеву группу симметрий. Таким образом, задача о существовании гладкого поля симметрий является содержательной либо в окрестности равновесия, либо во всем фазовом пространстве.

Приведем два простых примера динамических систем, допускающих нетривиальные аналитические поля симметрий, но не имеющих непостоянных непрерывных интегралов.

1) Рассмотрим условно-периодическое движение на n-мерном торе $\mathrm{T}^n = \{x_1, \ldots$ $\ldots, x_n \bmod 2\pi\}$, задаваемое системой $x_i^{\cdot} = \omega_i$ с независимыми над кольцом целых

чисел постоянными частотами ω_i. Эта система эргодична на T^n и поэтому не допускает непостоянных непрерывных интегралов. Однако любое постоянное векторное поле на T^n является ее полем симметрий.

2) Пусть $v(x) = Ax$, причем все собственные значения оператора A лежат в левой (или правой) полуплоскости. Ввиду асимптотической устойчивости равновесия $x = 0$ при $t \to +\infty$ (или $t \to -\infty$) соответствующая система (1.1) не имеет непостоянных непрерывных первых интегралов. Однако $u \equiv x$ — поле симметрий; оно порождает группу растяжений $x \mapsto e^{\tau}x$, $\tau \in \mathbf{R}$.

В гамильтоновой системе наличие первого интеграла F влечет наличие группы симметрий: гамильтоново векторное поле с гамильтонианом F является полем симметрий. Это наблюдение можно обобщить. Пусть ω — замкнутая 1-форма в фазовом пространстве системы с гамильтонианом H. Локально $\omega = dF$, и поэтому форме ω можно поставить в соответствие локально-гамильтоново векторное поле с функцией Гамильтона F. Если H и F находятся в инволюции, то это поле является полем симметрий исходной гамильтоновой системы. Форму ω (или многозначную функцию F) можно назвать многозначным интегралом системы с гамильтонианом H.

Приведем пример многозначного интеграла. Для этой цели рассмотрим движение заряженной частицы по плоскому тору $\mathrm{T}^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$ в постоянном магнитном поле. Уравнения движения

$$x^{\cdot\cdot} - \alpha y^{\cdot} = 0, \quad y^{\cdot\cdot} + \alpha x^{\cdot} = 0; \quad \alpha = \mathrm{const}$$

имеют два линейных по скорости интеграла $x^{\cdot} - \alpha y$ и $y^{\cdot} + \alpha x$, которые являются многозначными функциями в фазовом пространстве $\mathrm{T}^2 \times \mathbf{R}^2$.

Ниже рассматривается задача о существовании полей симметрий, определенных во всем фазовом пространстве. Так как λv, $\lambda = \mathrm{const}$ — тривиальное поле симметрий, то необходимо ввести предположение о линейной независимости полей u и v. Заметим, что если $u = \lambda(x) v$ и $[u, v] \equiv 0$, то функция λ — первый интеграл системы (1.1).

2. Невырожденные замкнутые траектории. Пусть v — аналитическое векторное поле на аналитическом многообразии M^n. Периодическая траектория γ называется невырожденной, если $n - 1$ ее мультипликаторов отличны от единицы. Через Γ обозначим объединение всех невырожденных замкнутых траекторий системы (1.1). Множество Γ назовем ключевым, если любая аналитическая функция на M, обращающаяся в нуль на Γ, тождественно равна нулю на всем M.

Теорема 1. Если Γ — ключевое множество, то любое аналитическое поле симметрий u системы (1.1) во всех точках M линейно зависимо с v. Если, кроме того, $v \neq 0$, то $u = \lambda v$, $\lambda = \mathrm{const}$.

Доказательство. Пусть γ — невырожденная замкнутая траектория. Тогда в малой окрестности γ система (1.1) не имеет других замкнутых траекторий с близким периодом. Если u — поле симметрий, то $g_u^{\tau}(\gamma)$ — замкнутая траектория (1.1), причем при малых τ ее период мало отличается от периода γ. Следовательно, $g_u^{\tau}(\gamma) \equiv \gamma$ при всех τ, и поэтому в точках траектории γ векторы u, v линейно зависимы. Последнее свойство имеет место всюду на Γ. Пусть теперь Ω — произвольная аналитическая 2-форма на M. Так как $\Omega(u, v)$ — аналитическая функция на M, равная нулю в точках из Γ, то $\Omega(u, v) \equiv 0$. Воспользуемся следующим фактом: пусть Ω_0 — заданная внешняя форма в точке $x_0 \in M$; существует аналитическая дифференциальная форма Ω_x на M, которая при $x = x_0$ совпадает с Ω_0. Отсюда выводится линейная зависимость полей u, v во всех точках M. Если $v \neq 0$, то $u = \lambda(x) v$, где λ — аналитическая функция на M, которая является интегралом (1.1) (см. п. 1). Известно, что $d\lambda = 0$ в точках множества Γ [3] (п. 64). Так как множество Γ ключевое, то $\lambda = \mathrm{const}$, что и требовалось.

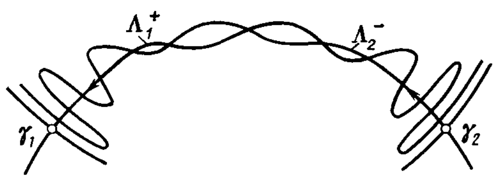
В качестве примера рассмотрим компактную поверхность M и предположим, что (1.1) — У-система [4]. Известно, что все периодические траектории гиперболичны (следовательно, невырождены) и множество Γ всюду плотно в M [4]. Поэтому У-система не имеет даже нетривиальных непрерывных полей симметрии. В частности, геодезический поток на компактном многообразии с отрицательной кривизной не имеет многозначных интегралов.

Родственным примером служит частный вариант ограниченной задачи трех тел: два массивных тела обращаются вокруг их общего центра масс по эллиптическим орбитам с ненулевым эксцентриситетом, а третье тело ничтожно малой массы все время движется по прямой, ортогональной плоскости орбит массивных тел [5]. Расширенное фазовое пространство этой неавтономной системы трехмерно. Из результатов работы [5] выводится ключевое свойство множества гиперболических периодических траекторий. Следовательно, эта система не имеет нетривиальной группы симметрий и, в частности, отсутствует многозначный аналитический интеграл. Несуществование однозначного интеграла отмечено в [5]. Аналогично доказывается отсутствие аналитической группы симметрий на энергетических поверхностях с большой отрицательной энергией плоской круговой ограниченной задачи трех тел. Необходимые подготовительные результаты установлены в [6] методами символической динамики.

3. Расщепление асимптотических поверхностей. Пусть M^3 — трехмерное аналитическое многообразие и аналитическое векторное поле v не имеет на нем положений равновесия. Предположим, что имеются две гиперболические периодические траектории γ_1 и γ_2. Через Λ_1^+ (Λ_2^-) обозначим устойчивую (неустойчивую) асимптотическую поверхность траектории γ_1 (γ_2). Эти поверхности регулярны и аналитичны.

Теорема 2. Предположим, что Λ_1^+ и Λ_2^- пересекаются и не совпадают как множества точек в M. Тогда система (1.1) имеет лишь тривиальные аналитические поля симметрий: $u = \lambda v$, $\lambda = \mathrm{const}$.

Укажем схему доказательства. Пересечение $\Lambda_1^+ \cap \Lambda_2^-$ состоит из траекторий системы (1.1), которые неограниченно приближаются к γ_1 (γ_2) при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$). Преобразования из группы g_u переводят эти



Фиг. 1

двоякоасимптотические траектории в себя. На двоякоасимптотических траекториях поля u и v линейно зависимы. В противном случае Λ_1^+ и Λ_2^- пересекались бы по двумерным аналитическим площадкам и поэтому совпадали бы по свойству регулярности и аналитичности. Ввиду осцилляции асимптотических поверхностей Λ_1^+ и Λ_2^- (фиг. 1) и аналитичности полей u, v эти поля линейно зависимы во всех точках M. Остается еще заметить, что в предположениях теоремы 2 система (1.1) на M не имеет непостоянных аналитических интегралов [7].

Применим теорему 2 к задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Будем рассматривать эту задачу как возмущение интегрируемой задачи Эйлера — Пуансо. Малым параметром ε является произведение веса тела на расстояние от центра масс до точки подвеса. Исключая группу поворотов тела вокруг вертикали и фиксируя значение постоянной площадей, сведем задачу к исследованию гамильтоновой системы с двумя степенями свободы.

Теорема 3. Если твердое тело динамически несимметрично, то при малых ненулевых значениях ε приведенная гамильтонова система с двумя степенями свободы не имеет нетривиальной аналитической группы симметрий.

Следствие. В указанных предположениях приведенные уравнения не имеют многозначного аналитического интеграла, независимого с интегралом энергии.

Это утверждение усиливает известный результат [8, 9] о несуществовании однозначных аналитических первых интегралов.

Для доказательства теоремы 3 зафиксируем положительное значение интеграла энергии. При $\varepsilon = 0$ на соответствующем трехмерном интегральном многообразии имеются два периодических движения гиперболического типа (постоянные вращения тела вокруг средней оси инерции). Их устойчивые и неустойчивые асимптотические поверхности сдвоены. Как показано в работах [10, 9, 11], при малых $\varepsilon \neq 0$ эти поверхности расщепляются, причем некоторые из возмущенных асимптотических поверхностей всегда пересекаются не совпадая. Поэтому применима теорема 2.

Трансверсальное пересечение асимптотических поверхностей имеет место во многих задачах гамильтоновой механики: колебания маятника с вибрирующей точкой подвеса, задача Кирхгофа о движении твердого тела в жидкости, задача четырех вихрей и т. д. (см. [7]). Во всех этих случаях справедливо заключение теоремы 2. Было бы интересным распространить теорему 2 на многомерный случай. Здесь речь должна идти о существовании сразу нескольких полей симметрий, число которых равно числу степеней свободы.

4. Теория возмущений. Рассмотрим задачу о наличии групп симметрий у систем дифференциальных уравнений «нормального» вида, часто встречающихся в приложениях:

$$y_j^{\cdot} = \varepsilon F_j + \ldots, \quad x_k^{\cdot} = \omega_k + \varepsilon \Phi_k + \ldots; \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{4.1}$$

Здесь частоты ω_k зависят лишь от медленных переменных y, переменные x — угловые (правые части периодичны по всем x_k с периодом 2π), ε — малый параметр; многоточие обозначает члены порядка $\geqslant 2$ по ε.

Будем рассматривать симметрии (4.1), порожденные системой уравнений следующего вида:

$$y_j' = Y_j^0 + \varepsilon Y_j^1 + \ldots, \quad x_k' = X_k^0 + \varepsilon X_k^1 + \ldots \tag{4.2}$$

Коэффициенты Y_j^λ и X_k^μ считаются 2π-периодическими по координатам $x_1, \ldots, x_k$. Другими словами, для поля v_ε разыскиваются симметрии u_ε, аналитические по ε.

Ограничимся рассмотрением «невырожденного» случая, когда выполнены следующие условия:

1) $n \geqslant m$ и ранг матрицы $\| \partial\omega_k/\partial y_j \|$ почти всюду равен m.

2) если $\Sigma\, \omega_k(y)\, \alpha_k \equiv 0$ с некоторыми целыми α_k, то все $\alpha_k = 0$.

Например, при $m = 1$ эти условия заведомо выполнены, когда кривая $y \mapsto \omega(y)$ регулярна и трансверсально пересекает резонансные поверхности $\Sigma\,\omega_k\alpha_k = 0$ ($\alpha \in \mathbf{Z}^n$). Если $m = n$, то условия невырожденности сводятся к единственному: почти всюду $\det \| \partial\omega_k/\partial y_j \| \neq 0$.

Все функции, встречающиеся ниже, считаются аналитическими.

Положим сначала $\varepsilon = 0$ и найдем все поля симметрий невозмущенной интегрируемой системы. Можно показать, что условие коммутирования фазовых потоков невозмущенных систем (4.1) и (4.2) эквивалентно серии равенств

$$(4.3)\qquad \sum \frac{\partial Y_j^\circ}{\partial x_l}\omega_l = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

$$(4.4)\qquad \sum \frac{\partial \omega_k}{\partial y_j} Y_j^\circ = \sum \frac{\partial X_k^\circ}{\partial x_l}\omega_l, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

Лемма 1. Если система невырождена, то $Y_j^\circ \equiv 0$, а X_k° не зависят от $x_1, \ldots, x_n$.

Доказательство. Решим уравнения (4.3), (4.4) методом Фурье. Положим

$$Y_j^\circ = \Sigma \zeta_\alpha(y)\, e^{i(\alpha, x)}, \quad (\alpha, x) = \Sigma \alpha_k x_k$$

Тогда из (4.3) найдем, что $(\alpha, y)\, \zeta_\alpha \equiv 0$. Так как невозмущенная система по предположению невырождена и в кольце аналитических функций нет делителей нуля, то $\zeta_\alpha = 0$ при $\alpha \neq 0$. Следовательно, функции Y_j° зависят лишь от y. Усредняя затем обе части равенства (4.4) по $x_1, \ldots, x_n$, приходим к соотношению

$$\Sigma \frac{\partial \omega_k}{\partial y_j} Y_j^\circ = 0$$

Так как по предположению $\operatorname{rank} \|\partial\omega_k/\partial y_j\| = m \leqslant n$, то $Y_j^\circ \equiv 0$. Из (4.4) затем получаем, что функции X_k° зависят лишь от медленных переменных.

Положим

$$F_j = \Sigma f_\alpha^j(y)\, e^{i(\alpha, x)}, \quad Y_j^1 = \Sigma g_\alpha^j(y)\, e^{i(\alpha, x)}$$

Из условий коммутирования фазовых потоков систем (4.1) и (4.2) в первом приближении по ε можно вывести равенства

$$(4.5)\qquad (\alpha, \omega)\, g_\alpha = (\alpha, X^\circ)\, f_\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{Z}^n$$

Здесь X°, f_α, g_α — векторы с компонентами X_k°, f_α^j, g_α^j. При выводе (4.5) была существенно использована лемма 1.

Введем в рассмотрение резонансное множество $\mathbf{K}$, состоящее из всех точек $y \in \mathbf{R}^m$, для которых найдутся $n - 1$ линейно независимых векторов $\alpha, \alpha', \ldots, \in \mathbf{Z}^n$, таких, что $(\alpha, \omega(y)) = (\alpha', \omega(y)) = \ldots = 0$ и $f_\alpha(y) \neq 0$, $f_{\alpha'}(y) \neq 0, \ldots$.

Лемма 2. Предположим, что в некоторой ограниченной открытой области $D \subset \mathbf{R}^m = \{y\}$ вектор частот $\omega \neq 0$ и множество $\mathbf{K} \cap D$ является ключевым. Тогда найдется аналитическая функция ξ_0, такая, что $X^\circ = \xi_0\omega$.

Действительно, в точках множества $\mathbf{K}$ векторы X° и ω линейно зависимы. Отметим, что в типичном случае $\mathbf{K}$ всюду плотно в $\mathbf{R}^m$.

Подставим в (4.5) вместо X° векторное поле $\xi_0\omega$ и воспользуемся неравенством $(\alpha, \omega) \not\equiv 0$. Тогда $g_\alpha = \xi_0 f_\alpha$ для всех $\alpha \neq 0$. Положим

$$\Phi_k = \Sigma\varphi_\alpha^k(y)\, e^{i(\alpha, x)}, \quad X_k^1 = \Sigma\Psi_\alpha^k(y)\, e^{i(\alpha, x)}$$

Из коммутирования систем (4.1) и (4.2) в первом приближении по ε выводится также цепочка следующих соотношений:

$$(4.6)\qquad i(\alpha, \omega)\,\Psi_\alpha^k = (\alpha, X^\circ)\,\varphi_\alpha^k + \sum \frac{\partial \omega_k}{\partial y_j} g_\alpha^j - \Sigma \frac{\partial X_k^\circ}{\partial y_j} f_\alpha^j, \qquad \alpha \in \mathbf{Z}$$

Полагая в (4.6) $y \in \mathbf{K}$, $X_k^\circ = \xi_0\omega_k$ и используя неравенство $\omega \neq 0$, приходим к соотношению

$$(4.7)\qquad \Sigma \frac{\partial \xi_0}{\partial y_j} f_\alpha^j = 0$$

Введем в рассмотрение распределение $(m-1)$-мерных плоскостей, порожденных линейно независимыми векторами $f_\alpha, f_{\alpha'}, \ldots$ в точках $y \in \mathbf{K}$. Пусть η — векторы в точках $y \in \mathbf{K}$, ортогональные этим гиперплоскостям. Векторное поле η определено на «разрывном» множестве $\mathbf{K}$. Через $\mathbf{K}'$ обозначим множество точек из $\mathbf{K}$, в которых вектор-функция η не является непрерывной.

Лемма 3. Предположим, что $\mathbf{K}' \cap D$ — ключевое множество. Тогда $\xi_0 = \mathrm{const}$.

Действительно, согласно (4.7) во всех точках из $\mathbf{K}$ вектор $\partial\xi_0/\partial y$ параллелен η. Так как поле $\partial\xi_0/\partial y$ непрерывно, то в точках разрыва функции η оно обращается в нуль.

Лемма 3 является грубым достаточным условием постоянства функции ξ_0: если поле η даже продолжается до аналитического поля во всем $\mathbf{R}^m$, то соответствующее распределение гиперплоскостей в общем случае будет неинтегрируемым. Смысл условия (4.7) станет ясным, если рассмотреть задачу о наличии у системы (3.1) однозначного аналитического интеграла в виде ряда

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \ldots \tag{4.8}$$

Функции H_0 и H_1 удовлетворяют уравнениям

$$\sum \frac{\partial H_0}{\partial x_k}\omega_k = 0, \quad \sum \frac{\partial H_0}{\partial y_j} F_j + \sum \frac{\partial H_1}{\partial x_k}\omega_k = 0 \tag{4.9}$$

Из первого уравнения при учете условия невырожденности вытекает что H_0 зависит лишь от переменных y. Полагая

$$H_1 = \sum h_\alpha(y)\, e^{i(\alpha, x)}$$

из второго уравнения (4.9) получим цепочку соотношений

$$\sum \frac{\partial H_0}{\partial y_j} f_\alpha{}^j + i(\alpha, \omega) h_\alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbf{Z}^n$$

В точках множества $\mathbf{K}$ функция H_0 удовлетворяет (4.7). Если выполнены условия леммы 3, то $H_0 \equiv \mathrm{const}$. По индукции аналогично доказывается, что все $H_s \equiv \mathrm{const}$. Итак, лемма 3 дает достаточное условие отсутствия у системы (4.1) непостоянных аналитических интегралов вида (4.8).

Теорема 4. Пусть выполнены условия лемм 1—3. Тогда $u_\varepsilon = \xi v_\varepsilon$, где функция ξ зависит лишь от ε.

Действительно, согласно леммам 1—3, $u_0 = \xi_0 v_0$, $\xi_0 = \mathrm{const}$. Следовательно, векторное поле $w_\varepsilon = (u_\varepsilon - \xi_0 v_\varepsilon)/\varepsilon$ также будет аналитическим полем симметрий. Из лемм 1—3 снова вытекает, что $w_0 = \xi_1 v_0$, $\xi_1 = \mathrm{const}$ и так далее. В результате приходим к равенству $u_\varepsilon = \xi v_\varepsilon$, где $\xi = \xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \ldots$.

5. Приложение к уравнениям Гамильтона. Рассмотрим гамильтонову систему

$$x_k^\cdot = \partial H/\partial y_k, \quad y_k^\cdot = -\partial H/\partial x_k; \quad k = 1, \ldots, n \tag{5.1}$$

$$H = H_0(y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon H_1(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n) + o(\varepsilon)$$

с аналитическим и 2π-периодическим по x гамильтонианом. В этом случае невырожденность означает, что гессиан H_0 по переменным y отличен от нуля, а условие $\omega \neq 0$ эквивалентно отсутствию критических точек функции H_0. Сопоставляя (4.1) и (5.1), получаем, что $F_j = -\partial H_1/\partial x_j$.

Разложим возмущающую функцию в ряд Фурье:

$$H_1 = \Sigma h_\alpha (y)\, e^{i(\alpha, x)}$$

Тогда $f_\alpha = -ih_\alpha \alpha$. В рассматриваемой задаче множество $\mathbf{K}$ есть множество всех точек $y \in \mathbf{R}^n$, для которых найдутся $n-1$ линейно независимых векторов $\alpha, \alpha', \ldots \in \mathbf{Z}^n$, таких, что $(\alpha, \omega (y)) = (\alpha', \omega (y)) = \ldots = 0$ и $h_\alpha (y) \neq 0$, $h_{\alpha'} (y) \neq 0, \ldots$. В отличие от общего случая система (4.7) здесь всегда имеет нетривиальное решение: ей удовлетворяет любая аналитическая функция от H_0. Поэтому теорема 4 для гамильтоновых систем несправедлива.

Пусть v_ε — гамильтоново векторное поле (5.1).

Теорема 5. Предположим, что y° — некритическая точка функции H_0 и в этой точке $\det \| \partial^2 H_0 / \partial y^2 \| \neq 0$. Предположим также, что в любой малой окрестности U точки y° множество $\mathbf{K}$ ключевое. Тогда в области $U \times \mathbf{T}^n \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^n$ справедливо равенство $u_\varepsilon = \Phi (H, \varepsilon)\, v_\varepsilon$, где Φ — некоторая аналитическая функция.

Доказательство. Согласно леммам 1 и 2, $u_0 = \xi_0 v_0$, где ξ_0 — аналитический интеграл невозмущенной системы, зависящий лишь от y. Известно [3, 7], что функции ξ_0 и H_0 зависимы. Так как в малой области U нет критических точек H_0, то по теореме о неявной функции в этой области $\xi_0 = \Phi_0 (H_0)$, где Φ_0 — некоторая аналитическая функция (см. [7]). Следовательно, векторное поле $w_\varepsilon = (u_\varepsilon - \Phi_0 (H)\, v_\varepsilon)/\varepsilon$ снова является аналитическим полем симметрий. Аналогично $w_0 = \Phi_1 (H_0)\, v_0$ и так далее. В результате приходим к равенству $u_\varepsilon = \Phi (H, \varepsilon)\, v_\varepsilon$, где $\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \ldots$

Согласно Пуанкаре [3, 7], условия теоремы 5 гарантируют отсутствие дополнительного аналитического интеграла, независимого с интегралом энергии. Таким образом, эта теорема при тех же предположениях усиливает результат Пуанкаре. Теорема 5 применима ко многим задачам гамильтоновой механики, в частности к плоской круговой ограниченной задаче трех тел (ср. с [3, 7]).

6. Случай «тощего» резонансного множества. Теорема 5 неприменима в случаях, когда резонансное множество $\mathbf{K}$ состоит лишь из конечного числа поверхностей. Здесь иногда также удается доказать отсутствие нетривиальных групп симметрий.

Рассмотрим гамильтонову систему (5.1) с двумя степенями свободы, в которой $H = H_0 + \varepsilon H_1$; $H_0 = (\Sigma a_{ij} y_i y_j)/2$ — положительно-определенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами, а возмущающая функция

$$H_1 = \Sigma h_\alpha e^{i(\alpha, x)}, \quad h_\alpha = \mathrm{const},$$

— тригонометрический многочлен. Введем конечное множество $\mathbf{M} = \{\alpha \in \mathbf{Z}^2 \colon h_\alpha \neq 0\}$, инвариантное при инволюции $\alpha \mapsto -\alpha$. Введем еще скалярное произведение по формуле $\langle \xi, \eta \rangle = \Sigma a_{ij} \xi_i \eta_j$.

Теорема 6. Гамильтонова система с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$ имеет нетривиальную группу симметрий тогда и только тогда, когда точки множества $\mathbf{M}$ расположены на $d \leqslant 2$ прямых, ортогонально пересекающихся (в метрике $\langle , \rangle$) в начале координат.

Достаточность условия теоремы 6 очевидна: гамильтонова система имеет дополнительный полиномиальный по импульсам интеграл не выше второй степени. Соответствующее гамильтоново поле является искомым полем симметрий. Необходимость выводится при помощи результатов работы [12], в которой дан детальный анализ бесконечного числа шагов теории возмущений для систем с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$.

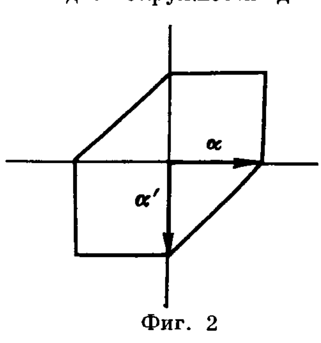
Вместо громоздкого формального доказательства теоремы 6 рассмотрим здесь один частный случай, показывающий препятствия динамического характера к существованию нетривиальной группы симметрий. Пусть E (M) — выпуклая оболочка множества M, которая является некоторым выпуклым многоугольником. Пусть α и α' — соседние вершины E (M), причем $\langle\alpha, \alpha'\rangle > 0$. Заметим, что ввиду инвариантности M относительно инволюции $\alpha \mapsto -\alpha$ всегда найдутся две вершины α и α', для которых $\langle\alpha, \alpha'\rangle \geqslant 0$. Предположим также, что для бесконечного набора целых чисел $m = 0, 1, 2, \ldots$ компоненты целочисленных векторов $m\alpha + \alpha'$ взаимно просты.

При этих предположениях доказано [12], что на двумерных резонансных торах $y = y°$, $x \bmod 2\pi$, $\langle m\alpha + \alpha', y°\rangle = 0$, $y° \neq 0$ рождаются пары невырожденных периодических решений. Согласно п. 1, на траекториях этих решений поля u_ε и v_ε линейно зависимы. По непрерывности, поля u_0 и v_0 линейно зависимы на «порождающих» периодических решениях, лежащих на невозмущенном резонансном торе $y = y°$. Так как невозмущенная система невырождена, то поля u_0 и v_0 не зависят от угловых переменных x. Следовательно, они линейно зависимы в точке $y°$. Такие точки лежат на бесконечном числе различных прямых $\langle m\alpha + \alpha', y\rangle = 0$, проходящих через начало координат. Совокупность этих прямых образует ключевое множество. Отсюда вытекает линейная зависимость векторных полей u_0 и v_0 во всех точках $y \in \mathbf{R}^2$. Для завершения доказательства можно применить рассуждения из п. 5: если $y° \neq 0$ — точка на предельной прямой $\langle\alpha, y\rangle = 0$ и U — ее малая окрестность, то в области $U \times T^2$ имеет место равенство $u_\varepsilon = \Phi(H, \varepsilon)\, v_\varepsilon$, где Φ — некоторая аналитическая функция.

Теорема 6 справедлива и для гамильтоновых систем с $n > 2$ степенями свободы, однако здесь речь уже идет о существовании n полей симметрий $u_\varepsilon^1, \ldots, u_\varepsilon^n$, независимых почти всюду при $\varepsilon = 0$. Отметим также, что условие теоремы 6 является критерием существования дополнительного однозначного интеграла, аналитического по ε [12].

В качестве примера рассмотрим задачу о движении трех частиц единичной массы на гладкой окружности единичного радиуса, которые упруго попарно притягиваются или отталкиваются. Пусть x_1, x_2, x_3 — угловые координаты этих точек, y_1, y_2, y_3 — их моменты. Гамильтониан имеет вид

$$H = {}^1/_2\,(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + \varepsilon\cos(x_1 - x_2) + \varepsilon\cos(x_2 - x_3) + \varepsilon\cos(x_3 - x_1)$$



Фиг. 2

Здесь ε — малый коэффициент упругого взаимодействия; он отрицателен (положителен) в случае притяжения (отталкивания). Кроме интеграла энергии уравнения движения имеют интеграл момента $y_1 + y_2 + y_3$. Понизим порядок системы при помощи канонического преобразования

$$q_1 = x_1 - x_2, \quad q_2 = x_2 - x_3, \quad q_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$y_1 = p_1 + p_3, \quad y_2 = -p_1 + p_2 + p_3, \quad y_3 = -p_2 + p_3$$

В новых переменных p, q интеграл p_3 циклический; положим $p_3 = 0$. Запишем гамильтониан приведенной системы:

(6.1) $$H = p_1^2 - p_1p_2 + p_2^2 + \varepsilon\cos q_1 + \varepsilon\cos q_2 + \varepsilon\cos(q_1 + q_2)$$

Выпуклая оболочка множества **M** изображена на фиг. 2. В качестве вершин E (**M**) возьмем два вектора: $\alpha = (1,0)$ и $\alpha' = (0, -1)$. Ясно, что компоненты вектора $m\alpha + \alpha'$ взаимно просты и $\langle\alpha, \alpha'\rangle > 0$. Следовательно, система с гамильтонианом (6.1) не имеет нетривиальных аналитических полей симметрий. В частности, отсутствуют многозначные интегралы, аналитические по ε и независимые с интегралом энергии. Препятствием является наличие у системы (6.1) бесконечного числа различных семейств невырожденных долгопериодических решений.

7. Некоторые обобщения. Предположим, что поля u, v удовлетворяют соотношению

$$(7.1)\qquad [u, v] = \mu v + \nu u$$

с некоторыми постоянными μ, ν. В окрестности неособой точки векторного поля u можно воспользоваться локальной теоремой о выпрямлении траекторий и привести уравнения (1.2) к виду

$$dx_1/d\tau = \ldots = dx_{n-1}/d\tau = 0, \quad dx_n/d\tau = 1$$

Если известно общее решение системы (1.2), то такое приведение осуществляется в явной форме. В переменных $x_1, \ldots, x_n$ коммутационное соотношение (7.1) эквивалентно серии равенств

$$(7.2)\qquad \partial v_i/\partial x_n = \mu v_i, \quad i < n, \quad \partial v_n/\partial x_n = \mu v_n + \nu$$

(v_i — компоненты поля v). Из (7.2) получаем

$$(7.3)\qquad v_i = e^{\mu x_n} v_i^\circ, \quad i < n; \quad v_n = e^{\mu x_n} v_n^\circ - \nu/\mu$$

где функции v_i° $(1 \leqslant i \leqslant n)$ не зависят от координаты x_n. Выполним замену времени $dt = e^{\mu x_n} ds$ и запишем первые $n - 1$ уравнений системы (1.1), обозначая штрихом дифференцирование по s:

$$(7.4)\qquad x_1' = v_1^\circ, \ldots, x_{n-1}' = v_{n-1}^\circ$$

Эту замкнутую систему дифференциальных уравнений можно рассматривать как результат понижения порядка исходной системы (1.1).

Предложение 1. Если известно общее решение системы (7.4), то уравнения (1.1) интегрируются в квадратурах.

Так как v_n° не зависит от x_n, то для доказательства достаточно проинтегрировать уравнение

$$(7.5)\qquad x_n' = -\nu\mu^{-1}e^{-\mu x_n} + f$$

где f — известная функция s (см. (7.3)). Заменой $z = e^{\mu x_n}$ уравнение (7.5) приводится к уравнению $z' = \mu f z - \nu$, которое легко интегрируется. Таким образом, переменные x_i находятся явно как функции от s. Для того чтобы выразить x_i через исходную переменную t, достаточно обратить интеграл

$$t = \int e^{\mu x_n} ds$$

Предложение 1 хорошо известно в случае, когда $\nu = 0$ (при этом μ может быть произвольной функцией от x). Если $[u, v] = \mu v$, то фазовый поток системы (1.2) переводит траектории (1.1) в траектории той же системы. Поэтому поле u также можно рассматривать как поле симметрий системы уравнений (1.1). В доказательстве теорем 1 и 2 речь шла лишь о свойствах траекторий (но не решений) системы (1.1). Поэтому эти утверждения справедливы и в случае обобщенных симметрий.

Вернемся вновь к уравнениям (4.1) и обсудим задачу о существовании поля u_ε (определяемого уравнениями (4.2)), удовлетворяющего соотношению

$[u_\varepsilon, v_\varepsilon] = \mu v_\varepsilon + \nu u_\varepsilon$, где $\mu = \mu_0 + \mu_1\varepsilon + \ldots$, $\nu = \nu_0 + \nu_1\varepsilon + \ldots$ — ряды по степеням ε с постоянными коэффициентами. Уравнения (4.3) и (4.4) заменятся более общими:

$$(7.6) \qquad \Sigma \frac{\partial Y_j^\circ}{\partial x_l}\omega_l = \nu_0 Y_j^\circ, \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

$$(7.7) \qquad \Sigma \frac{\partial X_k^\circ}{\partial x_l}\omega_l = \Sigma \frac{\partial \omega_k}{\partial y_j} Y_j^\circ + \mu_0\omega_k + \nu_0 X_k^\circ, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

Зафиксируем координаты $y_1, \ldots, y_m$ и рассмотрим на $\mathbf{T}^n = \{x_1, \ldots, x_n \bmod 2\pi\}$ вспомогательную систему уравнений $dx_k/ds = \omega_k = \mathrm{const}$. Тогда (7.6) можно записать в следующем виде: $d(Y_j^\circ)/ds = \nu_0 Y_j^\circ$. Ввиду периодичности функция Y_j° ограничена. Следовательно, либо 1) $Y_j^\circ \equiv 0$, либо 2) $\nu_0 = 0$.

В первом случае уравнение (7.7) приобретает вид

$$d(X_k^\circ)/ds = \nu_0 X_k^\circ + \mu_0\omega_k$$

Его решение (как функция от s) есть $ce^{\nu_0 s} - \mu_0\omega_k/\nu_0$, $c = \mathrm{const}$. Если $\nu_0 \neq 0$, то из ограниченности X_k° вытекает, что $c = 0$. В этом случае $X_k \equiv -\mu_0\omega_k/\nu_0$, и поэтому поля u_0 и v_0 линейно зависимы.

Рассмотрим второй случай, когда $\nu_0 = 0$. В предположении «невырожденности» (если $\Sigma\omega_k\alpha_k \equiv 0$, $\alpha_k \in \mathbf{Z}$, то все $\alpha_k = 0$) из (7.6) снова вытекает, что функция Y_j° не зависит от переменных x. Усредняя затем обе части соотношения (7.7) по $x_1, \ldots, x_n$, приходим к равенствам

$$(7.8) \qquad \Sigma \frac{\partial \omega_k}{\partial y_j} Y_j^\circ + \mu_0\omega_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

Введем матрицу $M = \| \partial\omega_k/\partial y_j \mid \omega \|$, где $\omega = \mathrm{col}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Если $n \geqslant m$ и ранг матрицы M почти всюду равен $m + 1$, то из (7.8) вытекают равенства $Y_j^\circ \equiv 0$ и $\mu_0 = 0$ (ср. с п. 4). Таким образом, соотношения (7.7) приобретают вид $\Sigma(\partial X_k/\partial x_l)\,\omega_l = 0$, откуда вытекает, что функции X_k° не зависят от $x_1, \ldots, x_n$. Далее, соотношения (4.5) заменятся на следующие:

$$[i(\alpha, \omega) + \nu_1]\, g_\alpha = [i(\alpha, X^\circ) + \mu_1]\, f_\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{Z}^n$$

Рассуждения п. 4 проходят в случае, когда ν не зависит от ε. Тогда $\nu_1 = 0$. Если $y \in \mathbf{K}$, то $(\alpha, \omega) = 0$ и $f_\alpha \neq 0$. Следовательно, $i(\alpha, X^\circ) + \mu_1 = 0$, откуда одновременно вытекают равенства $(\alpha, X^\circ) = 0$ и $\mu_1 = 0$. Эти соображения позволяют обобщить теорему 4 на случай коммутационного соотношения (7.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли. М.; Л.: Гостехиздат. 1940. 396 с.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978. 399 с.
3. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука. 1971. 771 с.
4. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. 1967. Т. 90. 210 с.
5. *Алексеев В. М.* Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36 Вып. 4. С. 161—176.
6. *Llibre J., Simó C.* Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem // Math. Ann. 1980. V. 248. No. 2. P. 153—184.
7. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3—67.

8. *Козлов В. В.* Несуществование дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1975. № 1. С. 105—110.
9. *Зиглин С. Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Тр. Моск. мат. об-ва. 1980. Т. 41. С. 287—303.
10. *Козлов В. В.* Расщепление сепаратрис возмущенной задачи Эйлера — Пуансо // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1976. № 6. С. 99—104.
11. *Довбыш С. А.* Пересечение асимптотических поверхностей возмущенной задачи Эйлера — Пуансо // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 363—370.
12. *Козлов В. В.*, *Трещёв Д. В.* Об интегрируемости гамильтоновых систем с торическим пространством положений // Мат. сб. 1988. Т. 135. № 1. С. 119—138.

Москва

Поступила в редакцию
28.I.1988