УДК 517.933 МАТЕМАТИКА

В.В. КОЗЛОВ

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛАХ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком С.П. Новиковым 22 I 1987)

1. Динамика взаимодействия трех одинаковых частиц на прямой описывается гамильтоновой системой с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + f(q_1 - q_2) + f(q_2 - q_3) + f(q_3 - q_1). \tag{1}$$

Функция f – потенциал взаимодействия – предполагается четной. Кроме полной энергии H, сохраняется еще суммарный импульс $P = p_1 + p_2 + p_3$. Таким образом, задача о полной интегрируемости системы с гамильтонианом (1) сводится к вопросу о существовании дополнительного интеграла, коммутирующего с функцией P. Мозер и Калоджеро показали, что такой интеграл существует, если потенциал f является $\wp$-функцией Вейерштрасса (либо ее вырожденными случаями x^{-2}, $\sin^{-2}x$, $\operatorname{sh}^{-2}x$) [1, 2]. Более того, дополнительный интеграл можно указать в виде полинома третьей степени по импульсам с однозначными коэффициентами, инвариантного относительно перестановок пар канонических переменных p_s, q_s. В работе [3] доказано, что такой полиномиальный интеграл существует лишь для потенциалов Мозера–Калоджеро.

Мы будем рассматривать потенциалы, которые являются аналитическими периодическими функциями с периодом 2π. Примером может служить система трех точек на окружности, соединенных упругими пружинами. Основной результат заметки составляет

Т е о р е м а 1. *Если $f \neq \mathrm{const}$, то уравнения Гамильтона с гамильтонианом* (1) *не имеют интеграла в виде полинома по импульсам с однозначными и аналитическими на трехмерном торе $\mathrm{T}^3 = \{q_1, q_2, q_3, \bmod 2\pi\}$ коэффициентами, который был бы независим от функций H и P.*

Существованию полиномиального интеграла препятствует наличие бесконечного числа короткопериодических решений, у которых не все характеристические показатели равны нулю.

2. Перейдем в инерциальную барицентрическую систему отсчета; в этой системе суммарный импульс равен нулю. Такой переход можно осуществить с помощью канонического преобразования

$$x_1 = q_1 - q_2, \quad x_2 = q_2 - q_3, \quad x_3 = q_1 + q_2 + q_3,$$
$$p_1 = y_1 + y_3, \quad p_2 = -y_1 + y_2 + y_3, \quad p_3 = -y_2 + y_3.$$

Полагая $y_3 = 0$, осуществим редукцию к системе с двумя степенями свободы, гамильтониан которой равен

$$(2) \qquad H = y_1^2 - y_1 y_2 + y_2^2 + f(x_1) + f(x_2) + f(x_1 + x_2).$$

Используя результаты КАМ-теории, можно показать, что любой однозначный аналитический интеграл системы с гамильтонианом (1) коммутирует с функцией P. После редукции этот интеграл перейдет в дополнительный интеграл системы с гамильтонианом (2). Поэтому в дальнейшем изучается вопрос о полиномиальных интегралах с аналитическими коэффициентами редуцированной системы с двумя степенями свободы.

Заменим в гамильтониане (2) потенциал f на ϵf, где ϵ — некоторый параметр. В результате будем иметь семейство гамильтоновых систем; значение $\epsilon = 0$ отвечает вполне интегрируемой системе.

Теорема 2. *Если $f \neq \mathrm{const}$, то гамильтонова система (с параметром ϵ) не имеет дополнительного интеграла в виде степенного ряда $\Sigma F_s \epsilon^s$ с аналитическими на прямом произведении $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}^2 = \{y, x \bmod 2\pi\}$ коэффициентами F_s.*

Теорема 1 является следствием теоремы 2. Действительно, после подстановки $y \mapsto y/\sqrt{\epsilon}$, $t \mapsto \sqrt{\epsilon} t$ уравнения движения останутся гамильтоновыми с функцией Гамильтона (2), в которой потенциал f заменен на ϵf. Дополнительный полиномиальный интеграл с точностью до несущественного постоянного множителя станет равным $F + \sqrt{\epsilon}\Phi$, где функции F и Φ аналитичны по ϵ. Остается заметить, что F и Φ — первые интегралы уравнений движения (с параметром ϵ). Ниже указана схема доказательства теоремы 2.

3. Рассмотрим более общую гамильтонову систему с гамильтонианом

$$(3) \qquad H = \tfrac{1}{2}\langle y, y\rangle + \epsilon V(x),$$

где $\langle y, y\rangle$ — положительно-определенная квадратичная форма по y_1, y_2 с постоянными коэффициентами, V — аналитическая функция, 2π-периодическая по x_1 и x_2. Разложим функцию V в двойной ряд Фурье:

$$(4) \qquad V = \Sigma v_{m_1 m_2} \exp i(m_1 x_1 + m_2 x_2).$$

Если в разложении (4) имеется бесконечно много ненулевых коэффициентов v_m с попарно линейно независимыми $m \in \mathbf{Z}^2$, то система с гамильтонианом (3) не имеет интеграла в виде ряда $\Sigma F_s \epsilon^s$ с аналитическими функциями F_s: $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}^2 \to \mathbf{R}$ (см. [4, 5]). Правда, для системы взаимодействующих частиц этот результат ничего не дает. Поэтому рассмотрим противоположный случай, когда точки $m \in \mathbf{Z}^2$ с нулевыми v_m расположены на конечном числе различных прямых из $\mathbf{R}^2$, проходящих через начало координат. Для каждого $k \in \mathbf{Z}^2$ корректно определена сумма

$$(5) \qquad \sum_{\tau+\sigma=k} \frac{\langle \tau, \sigma\rangle v_\tau v_\sigma}{\langle y, \tau\rangle\langle y, \sigma\rangle}.$$

С помощью теории возмущений доказывается

Т е о р е м а 3. *Предположим, что имеется бесконечно много попарно линейно независимых k таких, что сумма (5) не обращается в тождественный нуль на прямой $\langle k, y\rangle = 0$. Тогда гамильтонова система с гамильтонианом (3) не имеет дополнительного интеграла в виде ряда $\Sigma F_s \epsilon^s$ с однозначными и аналитическими коэффициентами.*

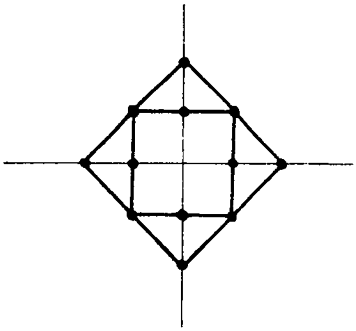

Рис. 1

Если функция V – тригонометрический полином, то теорема 3 также не дает заключения о неинтегрируемости. Остановимся на этом случае подробнее. Положим $\mathfrak{M} = \{ m \in \mathbf{Z}^2 : v_m \neq 0\}$. Для полиномиальных потенциалов множество $\mathfrak{M}$ конечно.

Т е о р е м а 4. *Предположим, что гамильтонова система имеет интеграл, независимый от интеграла энергии и аналитический по y, $x \bmod 2\pi$, ϵ. Тогда выпуклая оболочка множества $\mathfrak{M}$ либо состоит из одной точки $\{0\}$, либо является отрезком, либо параллелограммом с ортогональными диагоналями, причем на границе параллелограмма нет других точек из $\mathfrak{M}$, кроме его вершин.*

Теорема 4 выводится из одного результата общего характера о гамильтоновых системах с полиномиальным потенциалом, полученного автором и Д.В. Трещевым.

С л е д с т в и е. *Если потенциал f является непостоянным тригонометрическим многочленом, то задача о трех взаимодействующих частицах неинтегрируема.*

Действительно, в этом случае выпуклая оболочка множества $\mathfrak{M}$ является шестиугольником.

4. Разложим аналитический потенциал f в ряд Фурье:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f_s \exp(isx), \qquad \bar{f}_s = f_{-s} = f_s.$$

Пусть $k = (m, n) \in \mathbf{Z}^2$, причем $m \neq n$, $m \neq 0$, $n \neq 0$. Условие обращения в нуль суммы (5) на прямой $\langle k, y \rangle = 0$ можно представить в виде

$$\frac{f_m}{m}\,\frac{f_n}{n} = \frac{f_n}{n}\,\frac{f_{m-n}}{m-n} - \frac{f_m}{m}\,\frac{f_{m-n}}{m-n}. \tag{6}$$

Предположим, что теорема 2 не справедлива и что $f_\lambda \neq 0$ при некотором $\lambda \neq 0$. Тогда (ввиду теоремы 3) равенство (6) заведомо имеет место при $n = \lambda$ и всех достаточно больших m. Полагая $f_m/m = a_m$, получим

$$a_{m+\lambda} = a_m a_\lambda/(a_m + a_\lambda). \tag{7}$$

Случай, когда f полином, уже рассмотрен в п. 3. Поэтому можно считать, что при некотором сколь угодно большом m коэффициент $a_m \neq 0$. Из (7) получим по индукции равенство

$$a_{m+s\lambda} = a_m a_\lambda/(s a_m + a_\lambda).$$

Поскольку $a_m \neq 0$, то

$$\lim_{s\to\infty} f_{m+s\lambda} = a_\lambda \neq 0.$$

Следовательно, функция f не аналитическая; фактически она даже не является суммируемой на отрезке $[0, 2\pi]$.

5. Результаты п. 3 позволяют доказать неинтегрируемость некоторых других известных гамильтоновых систем. В качестве примера рассмотрим систему с двумя степенями свободы с функцией Гамильтона

$$H = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \alpha\,[f(q_1 - q_2) + f(q_1 + q_2)] + \beta\,\Sigma f(q_s) + \gamma\,\Sigma f(2q_s); \tag{8}$$

здесь f – периодическая функция, α, β, γ – постоянные. Многомерные системы такого вида обсуждались в работе [6].

Рассмотрим сначала случай, когда потенциал f – тригонометрический многочлен. Оказывается, критерием интегрируемости является выполнение равенства

$$\alpha(\beta^2 + \gamma^2) = 0. \tag{9}$$

Действительно, при $\gamma \neq 0$ выпуклая оболочка $\mathfrak{M}$ – квадрат, изображенный на рис. 1. Если $\alpha \neq 0$, то середины сторон квадрата являются точками из $\mathfrak{M}$. В этом случае теорема 4 гарантирует отсутствие дополнительного полиномиального по импульсам интеграла с периодическими коэффициентами. Пусть теперь $\gamma = 0$, а $\alpha\beta \neq 0$. Тогда выпуклая оболочка $\mathfrak{M}$ совпадает с внутренним квадратом (см. рис. 1) и середины его сторон принадлежат $\mathfrak{M}$. Поэтому снова применима теорема 4.

В более общем случае, когда потенциал является произвольной четной аналитической функцией, критерием интегрируемости также является равенство (9). Доказательство проводится методом п. 4.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
9 II 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Moser J.* – Adv. in Math., 1975, vol. 16, p. 197–220. 2. *Calogero F.* – Lett. Nuovo Cimento, 1975, vol. 13, № 11, p. 411–416. 3. *Пидкуйко С.И., Степин А.М.* – ДАН, 1978, т. 239, № 1, с. 50–53. 4. *Пуанкаре А.* Избр. тр. М.: Наука, 1971, т. 1. 5. *Козлов В.В.* – УМН, 1983, т. 36, вып. 1, с. 3–67. 6. *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* – Invent. Math., 1976, vol. 37, № 2, p. 93–108.