Функциональный анализ и его приложения,
1988, т. 22, вып. 1, 69—70

УДК 517.9 + 531.01

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МЕРАХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА — ПУАНКАРЕ НА АЛГЕБРАХ ЛИ

В. В. Козлов

1. Пусть G — группа Ли, g — ее алгебра. В соответствие с принципом Мопертюи будем трактовать уравнения геодезических левоинвариантной метрики на G как уравнения движения механической системы с пространством положений G и левоинвариантным лагранжианом. Запишем их в тензорных обозначениях. Пусть ω^i — скорость системы, $(I_{ij}\omega^i\omega^j)/2$ — кинетическая энергия, I_{ij} — тензор инерции, $m_k = I_{ki}\omega^i$ — момент системы. Уравнения движения (Эйлера — Пуанкаре) имеют следующий вид [1; 2]:

$$\dot{m}_k = c_{ik}^j \omega^i m_j, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{1}$$

где c_{ik}^j — структурные постоянные. Они являются системой уравнений на g (или g^*) с квадратичными правыми частями.

Рассмотрим задачу о наличии у системы уравнений Эйлера — Пуанкаре абсолютно непрерывной инвариантной меры (и. м.) $f d^n\omega$ с суммируемой плотностью f. Если f — положительная функция класса C^1, то и. м. называется интегральным инвариантом (и. и.).

Теорема 1. *Уравнения Эйлера — Пуанкаре имеют и. и. тогда и только тогда, когда группа G унимодулярна.*

Напомним, что унимодулярность группы означает наличие двусторонней инвариантной меры. Критерий унимодулярности имеет следующий вид: $c_{ik}^k = 0$ для всех i. Это условие можно представить в инвариантной форме: $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_\omega) = 0$ для всех $\omega \in g$.

Для доказательства достаточности условия теоремы 1 вычислим дивергенцию правой части (1) как системы на g^*. Она равна $c_{ik}^k\omega^i$. Следовательно, по теореме Лиувилля, фазовый поток системы (1) сохраняет меру $d^n\omega$. Необходимость вытекает из следующего утверждения.

Предложение 1. *Система дифференциальных уравнений с однородными правыми частями имеет и. и. тогда и только тогда, когда ее фазовый поток сохраняет стандартную меру. При этом плотность и. и. является ее первым интегралом.*

Доказательство. Пусть $f > 0$ — плотность и. и. системы $\dot{x} = v(x)$. Критерий Лиувилля $\operatorname{div}(fv) = 0$ с помощью замены $f = \exp(-w)$ представляется в виде уравнения $\dot{w} = \operatorname{div} v$. Правая часть этого равенства — однородная форма степени $m - 1$ (m — степень однородности векторного поля v). Так как $w \in C^1$, то $\dot{w} = O(|x|^m)$. Следовательно, $\dot{w} \equiv 0$ и $\operatorname{div} v \equiv 0$, что и требовалось.

2. В случае малой размерности g можно дать более точную информацию об и. м. системы (1). Если $n = 2$ и алгебра g неабелева, то уравнения (1) не имеют и. м. с суммируемой (а не только гладкой) плотностью. При $n = 3$ условие теоремы 1 может не выполняться лишь для разрешимых алгебр. Последние можно описать с помощью соотношений: $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2$, $[e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2$, где e_1, e_2, e_3 — базис в g, матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ невырождена. Будем различать случаи, когда собственные значения матрицы A — (a) вещественные числа одного знака, (b) вещественные числа разных знаков, (c) комплексные числа с ненулевой вещественной частью, (d) чисто мнимые числа.

Предложение 2. *В случае (d) уравнения Эйлера — Пуанкаре имеют и. и., в случае (b) нет и. и., однако имеется и. м. с плотностью любой конечной гладкости, в случаях (a) и (c) нет и. м. с суммируемой плотностью.*

В случае (d) алгебра g удовлетворяет условию теоремы 1. Механизм существования и. м. конечной гладкости при условии (b) легко уяснить на примере уравнений $\dot{x} = 2x$, $\dot{y} = -y$, имеющих и. м. с плотностью $|x|^s|y|^{2s+1}$ при всех $s > 0$. В случаях (a) и (c) на каждом эллипсоиде интеграла энергии $m_i\omega^i > 0$ имеется асимптотически устойчивое положение равновесия. Подчеркнем, что сформулированные выше условия существования и. м. определяются лишь структурой алгебры g и не зависят от выбора левоинвариантной метрики.

Неунимодулярная группа, как известно, всегда имеет унимодулярный нормальный делитель коразмерности один [3]. Пусть $\{e_k\}$ — базис в g, причем векторы $e_1, \ldots, e_{n-1}$ образуют базис в соответствующем «унимодулярном» идеале алгебры g, а вектор e_n ортогонален $e_1, \ldots, e_{n-1}$ в метрике I_{ij}.

Предложение 3. *Если все собственные числа матрицы $A = \| c_{nk}^s \|$ $(k, s < n)$ лежат в левой (или правой) полуплоскости, то уравнения (1) не имеют и. м. с суммируемой плотностью.*

Это утверждение вытекает из того факта, что равновесие $m_s = 0$ $(s < n)$, $m_n = \mathrm{const} \neq 0$ асимптотически устойчиво (при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$) на соответствующей поверхности интеграла энергии.

3. Рассмотрим более общую ситуацию, когда на механическую систему наложена левоинвариантная линейная связь

$$a_i\omega^i = 0, \tag{2}$$

где a — постоянный элемент из g^*. Примером является задача Суслова из неголономной механики: твердое тело с неподвижной точкой вращается так, что в каждый момент времени проекция угловой скорости на некоторое направление, неподвижное в теле, равна нулю. В соответствие с принципами динамики уравнения (1) в этой ситуации заменяются более общими:

$$\dot{m}_k = c_{ik}^j\omega^i m_j + \lambda a_k, \quad a_i\omega^i = 0. \tag{3}$$

Здесь λ — множитель Лагранжа. Уравнения (3) задают динамическую систему на гиперповерхности (2). Ниже формулируется критерий существования и. и. в общем случае компактной алгебры g. Метрика Киллинга позволяет провести отождествление g и g^*. В соответствие с этим соглашением будем считать a вектором из g.

Теорема 2. *Неголономные уравнения* (3) *имеют и. и. тогда и только тогда, когда вектор а является собственным для оператора* $\mathrm{ad}_{I^{-1}a}$

$$[I^{-1}a, a] = \mu a, \qquad \mu \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Условие (4) заведомо выполнено, если гиперплоскость (2) является собственной для оператора инерции I. В задаче Суслова ($g = so(3)$) последнее условие является критерием существования и. и.

Идея доказательства теоремы 2 такова. Выберем базис в g так, чтобы $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$, $a_n = 1$. В этом случае первые $n-1$ уравнений системы (3) (в которых положено $\omega^n = 0$) не содержат множитель λ и являются замкнутой системой дифференциальных уравнений относительно $\omega^1, \ldots, \omega^{n-1}$ с квадратичными правыми частями. Последнее уравнение вместе с уравнением связи служит для определения множителя λ. Условие (4) достаточно для сохранности стандартной меры $d\omega^1 \wedge \ldots \wedge d\omega^{n-1}$. Необходимость этого условия для существования и. и. вытекает из предложения 1.

4. В общем случае, когда на систему наложено несколько линейных связей, гиперплоскость (2) заменяется плоскостью «возможных скоростей» π меньшей размерности. Нетрудно показать, что если плоскость π является собственной для оператора инерции, то фазовый поток неголономных уравнений сохраняет стандартную меру на π.

Отметим в заключение, что если распределение плоскостей возможных скоростей правоинвариантно, то уравнения движения всегда имеют и.и. [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poincaré H.* // C. r. Acad. sient, Paris.— 1901. T. 132.— P. 369—371. **2.** *Arnold V.* // Annales de l'Institut Fourier.— 1966. T. XVI.— P. 319—361. **3.** *Бурбаки Н.* Интегрирование.— М.: Наука, 1970. **4.** *Веселов А. П.*, *Веселова Л. Е.* // Функцион. анализ и его прил.— 1986. Т. 20, вып. 4.— С. 65—66.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
16 октября 1986 г.