УДК 531.01

В. В. Козлов

ДИНАМИКА СИСТЕМ С НЕИНТЕГРИРУЕМЫМИ СВЯЗЯМИ, IV. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ *

Пусть $L(\dot{x}, x) = L_2 + L_1 + L_0$ — функция Лагранжа механической системы и $(a(x), \dot{x}) = 0$ — неинтегрируемая связь. Предполагается, что квадратичная форма $L_2 = (P(x)\dot{x}, \dot{x})/2$ положительно определена, а векторное поле a всюду отлично от нуля. В основе классической неголономной механики лежит принцип Даламбера — Лагранжа. В работах [1, 2] предложены и обоснованы новые нетрадиционные модели движения механических систем с неинтегрируемыми связями. Ниже будет показано, что движения системы в разных моделях являются стационарными точками действия по Гамильтону, заданного на разных пространствах кривых.

1. Реализация неголономных связей и вариационный принцип Гельдера. Предположим, что на свободную систему с лагранжианом L действуют силы вязкого трения с функцией Рэлея $F_N = N(a, \dot{x})^2/2$. Движения $t \to x_N(t)$ будут удовлетворять уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial F_N}{\partial \dot{x}}. \tag{1}$$

Известно, что при $N \to \infty$ на каждом конечном полуинтервале времени (,] решения системы (1) с фиксированным начальным состоянием сходятся к решениям неголономной системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda a, \quad (a, \dot{x}) = 0. \tag{2}$$

Обзор работ по этой теме содержится в [3].

Запишем теперь для свободной системы (1) принцип Гамильтона — Остроградского:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F_N}{\partial \dot{x}} \delta x dt. \tag{3}$$

Вариации δx — произвольные гладкие функции в интервале $[t_1, t_2]$, обращающиеся в нуль на концах. Предельный переход (1)→(2) обладает следующим свойством: если *начальный момент времени* не лежит в интервале $[t_1, t_2]$, то

$$\lim_{N \to \infty} N(a(x_N(t)), \dot{x}_N(t)) = -\lambda(t).$$

С учетом этого обстоятельства получаем, что

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\partial F_N}{\partial \dot{x}} \delta x = \lambda (a, \delta x).$$

Если теперь рассматривать лишь те вариации $\delta x(t)$, которые ортогональны вектору $a(t)$ при всех t, то при $N \to \infty$ принцип Гамильтона —

* Эта работа является продолжением [1; I—III].

Остроградского (3) перейдет в известный вариационный принцип Гельдера из неголономной механики:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (a(x(t)), \ \delta x(t)) = 0.$$

Эти наблюдения можно обобщить.

2. Общий вариационный принцип. Рассмотрим свободную систему с лагранжианом

$$L_N = L + \frac{\alpha N}{2} (a, \dot{x})^2, \quad \alpha = \text{const} > 0,$$

на которую действуют диссипативные силы с функцией Рэлея

$$F_N = \frac{\beta N}{2} (a, \dot{x})^2, \quad \beta = \text{const} \geqslant 0.$$

Уравнения движения имеют вид уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_N}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L_N}{\partial x} = - \frac{\partial F_N}{\partial \dot{x}}. \tag{4}$$

Запишем исходный лагранжиан L в явном виде: $(P\dot{x}, \dot{x})/2 + (v, \dot{x}) + U$, где v — векторное поле, а U — функция от x. В работе [2] доказана

Теорема 1. *Пусть $t \to x_N(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, — решение уравнения* (4) *с начальным состоянием x_0, $\dot{x}_0$, не зависящим от N и удовлетворяющим условию $(a(x_0), \dot{x}_0) = 0$. Тогда на каждом конечном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T_1 < T$ существует предел*

$$\lim_{N \to \infty} x_N(t) = \widehat{x}(t).$$

Предельное движение $\hat{x}(\cdot)$ вместе с некоторой сопряженной функцией $\hat{y}(\cdot)$ удовлетворяет каноническим уравнениям

$$\dot{y} = - \frac{\partial H_0}{\partial x} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{(P^{-1}(y - v), a)}{(P^{-1} a, a)} a, \quad \dot{x} = \frac{\partial H_0}{\partial y}, \tag{5}$$

где H_0 — результат обобщенного преобразования Лежандра лагранжиана L_0:

$$H_0 = y\dot{x} - L_0 |_{\dot{x} \to y}; \quad y = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}} + \mu a, \quad (a, \dot{x}) = 0.$$

Из второго уравнения (5) можно вывести, что предельное движение $\hat{x}(\cdot)$ удовлетворяет уравнению связи $(a, \dot{x}) = 0$ [2]. В работе [2] теорема 1 доказана для натуральных систем (когда $L_1 \equiv 0$). В более общем случае доказательство вполне аналогично. Можно показать, что существует предел

$$\lim_{N \to \infty} N(a(x_N(t)), \ \dot{x}_N(t)) = \lambda(t). \tag{6}$$

Воспользуемся теперь интегральным принципом Гамильтона — Остроградского для свободной системы:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L_N dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F_N}{\partial \dot{x}} \delta x dt.$$

Его можно переписать в следующем виде:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = -\int_{t_1}^{t_2} N(a, \dot{x}) \left\{\alpha\left[\left(\frac{\partial a}{\partial x}\delta x, \dot{x}\right) + (a, \delta\dot{x})\right] + \beta(a, \delta x)\right\} dt.$$

Устремляя N к бесконечности и используя (6), получаем

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = -\int_{t_1}^{t_2} \lambda\left[\left(\alpha\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^T \dot{x} + \beta a, \delta x\right) + \alpha(a, \delta\dot{x})\right] dt. \tag{7}$$

Если теперь ограничиться вариациями $\delta x(\cdot)$, удовлетворяющими уравнению

$$\left(\alpha\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^T \dot{x} - \beta a, \delta x\right) + \alpha(a, \delta\dot{x}) = 0, \quad \delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0, \tag{8}$$

то из (7) вытекает обобщенный вариационный принцип Гамильтона

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \tag{9}$$

Когда $\beta = 0$, вариационная задача (8)—(9) совпадает с классической задачей Лагранжа из вариационного исчисления (см., например, [4]). При этом кривые $x(\cdot) + \delta x(\cdot)$ в первом приближении удовлетворяют уравнению связи. Задача Лагранжа лежит в основе новой модели движения систем с неинтегрируемыми связями — вакономной механики [1].

Когда $\alpha = 0$, уравнение (8) переходит в обычное уравнение для вариаций в неголономной механике. Можно показать, что при $\beta/\alpha \to \infty$ решения уравнений (5) сходятся к решениям классических неголономных уравнений (2) (см. [2]).

Уравнение (8) можно переписать в следующем виде:

$$\alpha((\mathrm{rot}\, a)\dot{x}, \delta x) - \beta(a, \delta x) + \alpha(a, \delta x)^{\cdot} = 0,$$
$$\mathrm{rot}\, a = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^T - \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right). \tag{10}$$

Предположим, что связь интегрируема: $a = \partial f/\partial x$. Тогда $\mathrm{rot}\, a \equiv 0$ и $(a, \delta x) = \delta f$. Следовательно $\alpha(\delta f)^{\cdot} + \beta\delta f = 0$ и поэтому $\delta f = c\exp(-\beta t/\alpha)$, $c = \mathrm{const}$. Так как $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, то $c = 0$. В этом случае обобщенный вариационный принцип (8)—(9) перейдет в обычный принцип Гамильтона для голономных систем.

Теорема 2. *Допустимая кривая $x(\cdot)$ (удовлетворяющая уравнению связи $(a, \dot{x}) = 0$) является движением (вместе с некоторой функцией $y(\cdot)$ удовлетворяет уравнениям (5)) тогда и только тогда, когда эта кривая — экстремаль вариационной задачи* (8)—(9).

Прямое доказательство теоремы 2 содержится в следующем пункте.

3. Лагранжева форма уравнений движения. Умножая (10) на λ/α и интегрируя по отрезку $[t_1, t_2]$, из (8) и (9) получаем соотношение

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} - \lambda(\mathrm{rot}\, a)\dot{x} + \lambda\frac{\beta}{\alpha}a + \dot{\lambda}a\right)\delta x dt = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим обобщенные уравнения Лагранжа с множителем λ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=\lambda\,(\operatorname{rot} a)\,\dot{x}-\dot{\lambda}a+\lambda\frac{\beta}{\alpha}a,\ (a,\dot{x})=0. \tag{12}$$

Считая λ дополнительной координатой, введем новую функцию Лагранжа $\mathscr{L}=L-\lambda(a,\dot{x})$. Тогда уравнения (12) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}=+\lambda\frac{\beta}{\alpha}a,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\lambda}}=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda}. \tag{13}$$

Так как функция $\mathscr{L}$ вырождена по скоростям (от $\dot{\lambda}$ она вообще не зависит), то уравнения (13) нельзя непосредственно представить в канонических переменных с помощью обычного преобразования Лежандра. Для этой цели естественно воспользоваться обобщенным гамильтоновым формализмом Дирака [5]. Введем канонические импульсы

$$y=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}},\ \mu=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\lambda}}.$$

Второе соотношение дает первичную связь $\mu=0$. Функция Гамильтона

$$\mathscr{H}(y,x,\mu,\lambda)=y\dot{x}+\mu\dot{\lambda}-\mathscr{L}$$

на гиперповерхности $\mu=0$ равна

$$H(y,x,\lambda)-\lambda f(y,x,\lambda),$$

где H — гамильтониан системы с невырожденной функцией Лагранжа $L(\dot{x},x)$, $f=(a,\dot{x})$; скорости $\dot{x}$ заменены на функции от x, y, λ с помощью равенства

$$y=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}+\lambda\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}. \tag{14}$$

Так как

$$\dot{\mu}=-\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \lambda}=-\left(y\frac{\partial \dot{x}}{\partial \lambda}-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \lambda}-\lambda\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \lambda}-f\right)=f,$$

то условие совместности первичной связи $\dot{\mu}=0$ дает вторичную связь $f=0$. Эта связь, представленная в исходных переменных x, $\dot{x}$, нам задана с самого начала. Покажем, что многообразие $\mathscr{M}=\{\mu=f=0\}$ симплектическое. Критерий симплектичности — невырожденность матрицы

$$\left\|\begin{matrix}\{\mu,\mu\} & \{\mu,f\}\\ \{f,\mu\} & \{f,f\}\end{matrix}\right\|, \tag{15}$$

где $\{\,,\}$ — скобка Пуассона. Действительно,

$$\{\mu,f\}=-\frac{\partial f}{\partial \lambda}=-\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \lambda}=-\left(a,\frac{\partial \dot{x}}{\partial \lambda}\right).$$

Дифференцируя (14) по λ, получим

$$-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \lambda}=a.$$

Следовательно, $\{\mu,f\}=(P^{-1}a,a)$ и определитель матрицы (15) всюду на $\mathcal{M}$ отличен от нуля. В качестве локальных координат на $\mathcal{M}$ можно взять переменные x, y. Так как x, y коммутируют с λ, μ, то ограничение скобки $\{,\}$ на $\mathcal{M}$ является стандартной скобкой Пуассона в переменных x, y. Учитывая (14) и уравнения связи $f=0$, получаем, что ограничение функции Гамильтона $\mathcal{H}$ на $\mathcal{M}$ совпадает с гамильтонианом H_0 из теоремы 1. При этом

$$\lambda = -\frac{(P^{-1}(y-v),\, a)}{(P^{-1}a,\, a)},$$

и, следовательно, уравнения (13) в переменных x, y совпадают с каноническими уравнениями (5).

Если $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ — решения уравнений (5), то функции $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ удовлетворяют (12) и поэтому допустимая кривая $x(\cdot)$ является стационарной точкой действия по Гамильтону с пространством вариаций (8). Доказательство обратного утверждения носит технический характер и здесь не приводится.

4. Интегральные инварианты. Подсчитаем дивергенцию правой части уравнений (5). Она равна $-\beta/\alpha=\text{const}$. Следовательно, если $\beta=0$, то фазовый поток системы (5) сохраняет стандартную форму объема фазового пространства.

Теорема 3. *Если* $\beta\neq0$ *и уравнения* (5) *имеют фазовую траекторию, лежащую в компактной области фазового пространства, то не существует интегрального инварианта с положительной плотностью из класса* C^1.

Ограниченными траекториями являются, например, положения равновесия — стационарные точки силовой функции U.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\rho\in C^1$ — положительная плотность интегрального инварианта системы (5). Полагая $g=\ln\rho$, запишем уравнение Лиувилля в следующем виде: $\dot g=\beta/\alpha$. Пусть $t\mapsto z(t)$ — решение с ограниченной траекторией. Тогда функция $g(z(\cdot))$ ограничена. Следовательно,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \dot g\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{g(z(T))-g(z(0))}{T}=0.$$

Что и требовалось.

Подчеркнем, что теорема 3 справедлива и в том случае, когда связь интегрируема. На первый взгляд этот факт противоречит теореме Лиувилля о сохранности фазового объема для голономных систем. Но это противоречие только кажущееся.

Уравнение интегрируемой связи локально всегда можно записать в следующем виде: $x_n=0$. Следовательно, $\dot x_n=0$ и $a=(0, \ldots, 0, 1)$. Запишем уравнения (14) в явном виде, полагая $P=\|p_{ij}\|$ и учитывая уравнение связи:

$$y_i=\sum_{j=1}^{n-1} p_{ij}\dot x_j \ (i<n),\quad y_n=\sum_{j=1}^{n-1} p_{nj}\dot x_j+\lambda.$$

Функция Гамильтона

$$H_0=\sum_{i<n} y_i\dot x_i - L_0|_{\dot x\mapsto y}$$

будет, очевидно, являться преобразованием Лежандра функции $(L_0)_{x_n=0}$ и, значит, H_0 — гамильтониан системы с $n-1$ степенями свободы. Уравнения (5) для координат $x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}$ — суть обычные уравнения Гамильтона голономной системы, уравнение $\dot{x}_n = \partial H_0/\partial y_n$ совпадает с дифференциальным уравнением связи, а уравнение для «ненаблюдаемой» координаты y_n отделяется. Именно последнее уравнение, не существенное для динамики голономной системы, и дает весь вклад в дивергенцию системы (5). Если же связь неинтегрируема, то такого отделения переменных не происходит. Как показывают примеры из работы [2], в этом случае фазовый поток системы (5) может не иметь даже абсолютно непрерывной инвариантной меры (с суммируемой, а не только гладкой, плотностью). По-видимому, такая ситуация является типичной.

5. Симметрии и законы сохранения. Если лагранжиан L и уравнение связи $(a, \dot{x})=0$ не зависят явно от времени t, то уравнения (5) имеют интеграл $H_0=L_2-L_0$. Так как H_0 — функция от $x, \dot{x}$, то функция H_0 — наблюдаемая величина (ср. с [1, II]).

Гладкое векторное поле w на пространстве положений назовем полем симметрий, если фазовый поток системы

$$\frac{dx}{ds}=w(x) \tag{16}$$

сохраняет лагранжиан L.

Теорема 4. *Пусть w — поле симметрий и $x(\cdot)$ — движение. Если вектор-функция $w(x(\cdot))$ удовлетворяет уравнению* (10), *то на движении $x(\cdot)$ функция*

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, w\right)+\lambda(a, w)=(y, w) \tag{17}$$

постоянна.

Доказательство (по Э. Нетер). Так как w — поле симметрий, то действие

$$I(g^s(x(\cdot)))=\int_{t_1}^{t_2} L((g^s(x(t)))^{\cdot},\ g^s(x(t)))\,dt$$

не зависит от s (здесь g^s — фазовый поток системы (16)). Следовательно,

$$\left.\frac{dI}{ds}\right|_{s=0}=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, w\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}\right)w\,dt=0. \tag{18}$$

Воспользуемся уравнением (12). Для того чтобы охватить и неголономный случай (когда $\alpha=0$), запишем его в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=\alpha(\lambda(\operatorname{rot} a)\dot{x}-\dot{\lambda}a)+\beta\lambda a.$$

Интеграл в правой части (18) будет равен (ср. с (11))

$$-\lambda(a, w)\,\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\lambda\left[\alpha((\operatorname{rot} a)\dot{x}, w)+\alpha(a, w)^{\cdot}+\beta(a, w)\right]dt.$$

Так как функция $w(x(\cdot))$ удовлетворяет (10), то равенство (16) приобретает следующий вид:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \lambda a,\ w\right)\Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Что и требовалось доказать.

Если $\alpha=0$ (неголономный случай), то уравнение (10) дает $(a, w)=0$ и поэтому (17) превращается в обычный нетеров интеграл (ср. с [6]).

6. Вторая вариация и теорема об индексе. Начнем с анализа более простой задачи. Пусть M — гладкое многообразие, π_x, $x \in M$, — неинтегрируемое распределение касательных гиперплоскостей, f — гладкая функция на M. Предположим, что в некоторой точке $p \in M$ дифференциал df_p обращается в нуль на плоскости π_p. Можно ли в этой ситуации корректно определить билинейную симметричную форму $d^2 f_p$ на π_p? Пусть u, v — векторы из π_p. Их можно включить в векторные поля $\hat{u}$, $\hat{v}$ на M. Естественно положить (см. [7, § 2])

$$d^2 f_p(u, v) = \hat{u}_p(\hat{v}(f)).$$

Условие симметричности $d^2 f_p$ эквивалентно равенству

$$df([\hat{u}, \hat{v}]_p) = [\hat{u}, \hat{v}]_p(f) = 0.$$

Если даже потребовать выполнения условий $\hat{u}_x, \hat{v}_x \in \pi_x$, то (в силу неинтегрируемости распределения π) $[\hat{u}, \hat{v}]_p$, вообще говоря, не будет лежать в π_p. Следовательно, определение второй вариации f на π_p корректно лишь в двух случаях: точка p — критическая точка функции f или распределение π интегрируемо (тогда $[\hat{u}, \hat{v}]_p \in \pi_p$).

Ситуация с вариационной задачей (8)—(9) вполне аналогична. Оставляя в стороне хорошо изученные голономные системы, остановимся на случае, когда движения системы со связями являются движениями свободной системы. Такие движения назовем специальными. Они составляют редкое исключение среди множества всех движений. Для специальных движений $x(\cdot)$ корректно определена вторая вариация функционала действия (см. [7, § 13]):

$$\delta^2 I[x(\cdot)] = \int_{t_1}^{t_2} [(P\delta\dot{x}, \delta\dot{x}) + (Q\delta x, \delta x)]\, dt. \qquad (19)$$

Матрицы $P(t)=P(x(t))$ и $Q(t)$ симметричны, причем P положительно определена. Вторая вариация — квадратичный функционал на пространстве кривых $\delta x(\cdot)$, заданных условиями (8). Его степень вырождения и индекс, очевидно, не больше степени вырождения и индекса того же функционала, но заданного на пространстве «свободных» кривых с нулевыми значениями на концах. Следовательно, с учетом положительной определенности P эти величины для функционала (19) конечны.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$-\frac{d}{dt}(P\delta\dot{x}) + Q\delta x = \mu(\alpha(\operatorname{rot} a)\dot{x} + \beta a)_{x(t)} - \dot{\mu}(\alpha a)_{x(t)}, \qquad (20)$$

$$(\alpha(\operatorname{rot} a)\dot{x} + \beta a,\ \delta x) + \alpha(a, \delta x)^{\boldsymbol{\cdot}} = 0.$$

Ее решения — функции $\delta x(\cdot)$, удовлетворяющие вместе с некоторой функцией $\mu(\cdot)$ уравнениям (20). Точки $x(t_1)$ и $x(t_2)$ назовем сопряженными (вдоль специального движения $x(\cdot)$), если система (20) имеет нетривиальное решение δx с нулевыми значениями в точках t_1 и t_2. Размерность линейного пространства таких решений назовем кратностью сопряженных точек $x(t_1)$ и $x(t_2)$.

Стандартными методами вариационного исчисления доказывается

Теорема 5. *Степень вырождения функционала* (19) *равна кратности* $x(t_1)$ *и* $x(t_2)$ *как сопряженных точек. Индекс* (19) *равен числу точек* $x(t)$, $t_1<t<t_2$, *таких, что* $x(t)$ *сопряжена с* $x(t_1)$, *если считать каждую сопряженную точку столько раз, какова ее кратность.*

Для неголономных систем ($\alpha=0$) задача сводится к изучению функционала (19) на пространстве «свободных» кривых системы с $n-1$ степенями свободы. При этом условие положительной определенности P можно заменить более слабым условием положительной определенности формы $(P\xi, \xi)$ на плоскости $(a, \xi)=0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В. В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями. I, II, III//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1982. № 3. 92—100; 1982. № 4. 70—76; 1983. № 3. 102—111.
2. Козлов В. В. Реализация неинтегрируемых связей в классической механике//Докл. АН СССР. 1983. **272**, № 3. 550—554.
3. Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем//Итоги науки и техники: Общая механика. Т. 6. М., 1983.
4. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., 1950.
5. Дирак П. Обобщенная гамильтонова динамика//Вариационные принципы механики. М., 1959. 705—722.
6. Козлов В. В., Колесников Н. Н. О теоремах динамики//Прикл. матем. и механ. 1978. **42**, вып. 1. 28—33.
7. Милнор Дж. Теория Морса. М., 1965.

Поступила в редакцию
08.01.87