Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 4, 1987

УДК 531.01

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИНВАРИАНТА ГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Козлов В. В.

Рассматривается задача о существовании у динамической системы на цилиндрическом фазовом пространстве интегрального инварианта с гладкой плотностью. Известная теорема Крылова — Боголюбова гарантирует существование инвариантной меры у любой системы на компактном пространстве (обсуждение этих вопросов см. в [1, 2]). Однако эта мера зачастую сосредоточена на инвариантных множествах малой размерности и в общем случае не является интегральным инвариантом с суммируемой плотностью. Для содержательных применений эргодической теории, а также в теории интегрирующего множителя Эйлера—Якоби полезно иметь инвариантную меру в виде интегрального инварианта с гладкой плотностью. В работе предложены эффективные критерии существования таких мер у гладких динамических систем. Результаты общего характера проиллюстрированы примерами из неголономной механики.

1. Постановка задачи. Рассмотрим цилиндрическое фазовое пространство $M^n = \mathbf{R}^k \times \mathbf{T}^{n-k}$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$, среди которых k линейных и $n - k$ угловых. Пусть v — гладкое векторное поле на M^n. Ему отвечает дифференциальное уравнение

$$x^{\cdot} = v(x) \tag{1.1}$$

Рассмотрим задачу о существовании у системы (1.1) интегрального инварианта

$$\operatorname{mes}(D) = \int\limits_D f(x)\, d^n x \tag{1.2}$$

с гладкой положительной плотностью $f : M^n \to \mathbf{R}$.

Критерием существования интегрального инварианта (1.2) является уравнение Лиувилля $\operatorname{div}(fv) = 0$, которое с учетом положительности функции f можно переписать в виде

$$w^{\cdot} = -\operatorname{div} v, \quad w = \ln f \tag{1.3}$$

Ясно, что w — гладкая функция на M^n.

По теореме о выпрямлении траекторий, в малой окрестности неособой точки системы (1.2) имеется целое семейство интегральных инвариантов. Следовательно, задачу об интегральном инварианте имеет смысл рассматривать или в окрестности положений равновесия, или же в достаточно больших областях фазового пространства, где траектории обладают свойством возвращаемости.

Известно, что уравнения движения голономных механических систем всегда имеют естественную инвариантную меру (форма объема на пространстве кокасательного расслоения пространства положений). Как отмечено в [3], неголономные системы могут вообще не иметь инвариантной меры с интегрируемой плотностью.

Укажем два примера неголономных систем, которые будут использованы для иллюстрации результатов.

1°. *Задача о качении тяжелого твердого тела с выпуклой поверхностью по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.* Чаплыгин нашел инвариантную меру в случае, когда поверхность ограничена сферой и центр масс тела совпадает с ее геометрическим центром [4]. Можно доказать существование инвариантной меры и в том случае, когда твердое тело обладает осевой симметрией (как геометрической, так и динамической).

2°. *Задача Суслова о вращении по инерции твердого тела вокруг неподвижной точки с неголономной связью*: обращается в нуль проекция угловой скорости на некоторое неподвижное в теле направление [5]. Пусть $Ox_1x_2x_3$ — подвижная ортогональная система осей, p, q, r — проекции угловой скорости на эти оси: матрица инерции твердого тела

$$\begin{Vmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

α, β, γ — направляющие косинусы неподвижной вертикали относительно осей x_1, x_2, x_3. Уравнение неголономной связи примем в виде $r = 0$. Поворотом осей x_1 и x_2 можно добиться выполнения соотношения $D = 0$. В переменных p, q, α, β, γ уравнения вращения тела имеют вид [5]

$$\begin{gathered} Ap^{\cdot} = Epq + Fq^2, \ Bq^{\cdot} = -Fpq - Ep^2 \\ \alpha^{\cdot} = -q\gamma, \ \beta^{\cdot} = p\gamma, \ \gamma^{\cdot} = q\alpha - p\beta \end{gathered} \tag{1.5}$$

Было показано [3], что эти уравнения имеют интегральный инвариант тогда и только тогда, когда $E = F = 0$. В этом случае ось x_3 является собственной для матрицы инерции (1.4).

2. Условия существования интегрального инварианта.

Теорема 1. Пусть $x : \mathbf{R} \to M^n$ — решение системы (1.1) с компактным замыканием его траектории. Если система (1.1) имеет интегральный инвариант, то существует

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int_0^s (\operatorname{div} v)_{x(t)}\, dt = 0 \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $x(t) \in D_0$ и D_0 — компактная подобласть в M^n. Согласно (1.3)

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int_0^s \operatorname{div} v\, dt = \lim_{s\to\infty} \frac{w(x(0)) - w(x(s))}{s} = 0$$

так как непрерывная функция w ограничена снизу и сверху на множестве D_0.

Следствие. Пусть $x = 0$ — равновесное решение нелинейной системы $x^{\cdot} = Xx + \ldots$. Если $\operatorname{tr} X \neq 0$, то эта система не имеет в окрестности точки $x = 0$ интегрального инварианта с гладкой плотностью.

Действительно в этом случае $(\operatorname{div} v)_{x=0} = \operatorname{tr} X$. Остается воспользоваться формулой (2.1) для равновесного решения $x(t) \equiv 0$.

Интересно отметить, что условие $\operatorname{tr} X = 0$ означает сохранение стандартной формы объема в $\mathbf{R}^n$ фазовым потоком линейной системы $x^{\cdot} = Xx$. Таким образом, если линейная система с постоянными коэффициентами имеет хотя бы один интегральный инвариант, то она обязательно имеет стандартную инвариантную меру.

В неавтономном случае уравнение Лиувилля имеет вид $\partial f/\partial t + \operatorname{div}(fv) = 0$. Если $f > 0$, то, полагая $w = \ln f$, снова приходим к равенству (1.3). Известно, что решения $f(x, t)$ неавтономного уравнения Лиувилля всегда существуют. Они однозначно определяются, например, значениями плотности f при $t = 0$. Следовательно, в этой ситуации естественно рассматривать задачи о существовании интегральных инвариантов специального вида. Пусть, например, $x^{\cdot} = X(t)\, x + \ldots$ — нелинейная ω-периодическая система, имеющая тривиальное решение $x(t) \equiv 0$. Можно показать, что необходимым условием существования интегрального инварианта с ω-периодической плотностью является равенство

$$\int_0^\omega \operatorname{tr} X(t)\,dt = 0$$

Известно, что экспонента от правой части этого равенства равна произведению мультипликаторов линеаризованной системы.

Для положений равновесия неголономных систем сумма характеристических чисел равна нулю. Таким образом, необходимое условие существования интегрального инварианта выполнено. Однако для стационарных движений (относительных равновесий) это уже не так.

Приведем соответствующие примеры.

1°. При качении тяжелого твердого тела по горизонтальной шероховатой плоскости существуют стационарные движения, когда одна из центральных осей инерции вертикальна, а тело вращается с постоянной угловой скоростью, касаясь плоскости одной и той же точкой O. Из вида характеристического уравнения [6] можно сделать вывод, что сумма характеристических чисел пропорциональна (с ненулевым коэффициентом) $\sin\alpha\cos\alpha$, где α — угол между главными направлениями поверхности тела в точке O и двумя другими горизонтальными центральными осями инерции. Таким образом, если эти оси не совпадают, то уравнения качения не имеют интегрального инварианта. Несовпадение динамических и геометрических осей — характерное свойство так называемых кельтских камней (см. [6]).

2°. Уравнения движения в задаче Суслова (1.5) имеют стационарное решение, при котором

(2.2) $$p = -kF,\ q = kE,\ \alpha = lp,\ \beta = lq,\ \gamma = 0$$

Здесь k и l — постоянные, такие, что $(kl)^2(E^2 + F^2) = 1$. Решения (2.2) существуют лишь при очевидном условии $E^2 + F^2 \neq 0$.

След матрицы линеаризованной системы равен $k(E^2/A + F^2/B)$. Таким образом, согласно следствию из теоремы 1, интегральный инвариант для системы (1.5) существует лишь при условии $E = F = 0$. Этот вывод получен в [3] из геометрических соображений.

3. Интегральный инвариант в окрестности положения равновесия. Рассмотрим нелинейную систему

(3.1) $$x_s^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum \lambda_r^{(s)} x_r + \frac{1}{2}\sum a_{ij}^{(s)} x_i x_j + \ldots$$

Вопрос о существовании интегрального инварианта сводится к вопросу о разрешимости уравнения (1.3). Положим

$$w = w_0 + (a, x) + \ldots;\ w_0 \in \mathbf{R},\ a \in \mathbf{R}^n$$

Вычислим дивергенцию правой части системы (3.1):

$$-\operatorname{div} v = \operatorname{tr}\Lambda + (b, x) + \ldots$$

$$\Lambda = \|\lambda_r^{(s)}\|, \qquad b = (b_1, \ldots, b_n)^T, \qquad b_j = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}^{(s)}$$

В рассматриваемом случае уравнение (1.3) имеет следующий явный вид:

(3.2) $$(a, \Lambda x) + \ldots = -\operatorname{tr}\Lambda - (b, x) - \ldots$$

Отсюда получаем серию равенств: $\operatorname{tr}\Lambda = 0$, $\Lambda^T a = b, \ldots$ Первое из них уже было ранее получено в п. 2. Положим $X = \Lambda^T$, $Y = \|X, b\|$. Матрица Y имеет размер $n \times (n+1)$.

Теорема 2. Если $\operatorname{rank} X < \operatorname{rank} Y$, то система (3.1) не имеет интегрального инварианта в окрестности точки $x = 0$.

Действительно, всегда $\operatorname{rank} X \leqslant \operatorname{rank} Y$ и равенство рангов является условием разрешимости линейной системы $\Delta^T a = b$ относительно a. Это условие заведомо выполнено в случае, когда матрица Λ невырождена.

Отметим, что постоянную w_0 в разложении Маклорена функции w можно считать произвольной. Это соответствует тому факту, что плотность инвариантной меры определена с точностью до положительного постоянного множителя. Условием разрешимости уравнения (3.2) в первом приближении является совпадение рангов матриц X и Y. Если оно выполнено, то можно определить (возможно, неоднозначно) линейные по x слагаемые в разложении функции w. Приравнивая коэффициенты при членах второй степени в уравнении (3.2), получим линейную систему алгебраических уравнений для отыскания квадратичных слагаемых в разложении функции w. В эту систему линейно входят компоненты вектора a. Условием ее разрешимости является известное условие совпадения рангов Кронекера — Капелли. Аналогично, при анализе разрешимости уравнения (3.2) в высших приближениях возникают условия на ранги матриц, элементы которых выражаются через коэффициенты правых частей системы (3.1).

В качестве примера применения теоремы 2 снова рассмотрим систему (1.5) задачи Суслова. Так как на твердое тело не действуют силы, то любое ее положение является положением равновесия. Пусть α_0, β_0, γ_0 — значения направляющих косинусов в равновесном состоянии. Дивергенция векторного поля (1.5) равна $qE/A - pF/B$, поэтому $b = (-F/B,\ E/A,\ 0,\ 0,\ 0)^T$. Выпишем нетривиальную ненулевую часть матрицы Y:

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 0 & \gamma_0 & -\beta_0 & -F/B \\ -\gamma_0 & 0 & \alpha_0 & E/A \end{array} \right\|$$

Вертикальная черта отделяет элементы матрицы X. Пусть $\gamma_0 = 0$. Тогда $\operatorname{rank} X = 1$. Если

$$E\beta_0/A - F\alpha_0/B \neq 0 \tag{3.3}$$

то $\operatorname{rank} Y = 2$. Пусть $E^2 + F^2 \neq 0$. Тогда можно подобрать значения α_0 и β_0 ($\alpha_0^2 + \beta_0^2 = 1$) так, чтобы выполнялось условие (3.3). В этом случае, как уже отмечалось в п. 1, уравнения не имеют интегрального инварианта.

4. Принцип усреднения. Рассмотрим системы нормального вида, которые часто встречаются в приложениях:

$$I_k^{\cdot} = \varepsilon F_k(I, \varphi) + \ldots, \qquad \varphi_s^{\cdot} = \omega_s(I) + \varepsilon G_s(I, \varphi) + \ldots \tag{4.1}$$

Здесь $I = (I_1, \ldots, I_m)$ — декартовы координаты в $\mathbf{R}^m$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — набор угловых координат на n-мерном торе $\mathbf{T}^n$, ε — малый параметр. Функции F_s, G_s, ... предполагаются 2π-периодическими относительно угловых переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. При $\varepsilon = 0$ система (4.1), очевидно, имеет семейство инвариантных мер, плотности которых — произвольные гладкие положительные функции от переменных $I_1, \ldots, I_m$.

Исследуем задачу о наличии у системы (4.1) интегрального инварианта с плотностью в виде ряда

$$f_0(I, \varphi) + \varepsilon f_1(I, \varphi) + \ldots \tag{4.2}$$

с гладкими и однозначными на $\mathbf{R}^m \times \mathbf{T}^n$ коэффициентами f_α ($\alpha = 0, 1, \ldots$). Ясно, что $f_0 > 0$.

Невозмущенная система (4.1) легко интегрируется: переменные I, являющиеся первыми интегралами, нумеруют инвариантные торы, заполненные условно-периодическими движениями с частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Инвариантный тор $I = I_0$ называется нерезонансным, если $(\omega(I^0), k) \neq 0$

для всех целочисленных векторов $k \neq 0$. Фазовые траектории всюду плотно заполняют нерезонансные торы. Невозмущенную систему назовем невырожденной, если нерезонансные торы всюду плотно заполняют фазовое пространство $\mathbf{R}^m \times \mathbf{T}^n$.

Теорема 3. Предположим, что невозмущенная система невырождена и уравнения (4.1) имеют интегральный инвариант с плотностью (4.2). Тогда усредненная система

(4.3) $$\dot{J}_k = \varepsilon \overline{F}_k (J),\ k = 1, \ldots, m$$

имеет интегральный инвариант с плотностью $\overline{f}_0$.

Здесь черта означает, как обычно, результат применения оператора усреднения по угловым переменным φ. Переход от полной системы (4.1) к усредненной (4.3) является стандартным приемом теории возмущений. Отметим одно из следствий теоремы 3: если $k = 1$ и функция $\overline{F}$ имеет изолированный нуль, то полная система (4.1) не имеет инвариантной меры с плотностью в виде ряда (4.2).

Доказательство теоремы 3. Так как $f_0 > 0$, то при малых значениях ε в окрестности каждого инвариантного тора невозмущенной системы функцию $w = \ln f$ также можно представить в виде ряда по степеням ε: $w = w_0 (I, \varphi) + \varepsilon w_1 (I, \varphi) + \ldots$. В рассматриваемой задаче уравнение (1.3) имеет следующий вид:

$$\sum \frac{\partial w_0}{\partial \varphi_s} \omega_s + \varepsilon \left[\sum \frac{\partial w_0}{\partial I_k} F_k + \sum \frac{\partial w_1}{\partial \varphi_s} \omega_s \right] + \ldots =$$
$$= -\varepsilon \left[\sum_k \frac{\partial F_k}{\partial I_k} + \sum_s \frac{\partial G_s}{\partial \varphi_s} \right] + \ldots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим цепочку уравнений для последовательного нахождения функций $w_0, w_1, \ldots$:

(4.4) $$\sum \frac{\partial w_0}{\partial \varphi_s} \omega_s = 0$$

(4.5) $$\sum \frac{\partial w_0}{\partial I_k} F_k + \sum \frac{\partial w_1}{\partial \varphi_s} \omega_s = -\sum \frac{\partial F_k}{\partial I_k} - \sum \frac{\partial G_s}{\partial \varphi_s}$$

Из (4.4) следует, что w_0 — интеграл невозмущенной системы. Так как эта система невырождена, то w_0 не зависит от угловых переменных (ср. с [7], гл. V). Усредняя (4.5) по переменным φ, приходим к равенству

$$\sum \frac{\partial w_0}{\partial I_k} \overline{F}_k = -\sum \frac{\partial \overline{F}_k}{\partial I_k}$$

Следовательно, функция $f_0 = \exp w_0 > 0$ также не зависит от φ и является плотностью инвариантной меры усредненной системы.

Теорема 3 обобщается на случай систем, рассмотренных в [8]: при $\varepsilon = 0$ фазовое пространство расслоено на интегральные многообразия. Невырожденность невозмущенной системы означает всюду плотность инвариантных многообразий, на которых динамическая система эргодична.

5. Интегральный инвариант систем нормального вида. Ниже будут указаны более точные условия существования интегрального инварианта системы (4.1). Разложим функции F_k и G_k в кратные ряды Фурье

$$F_k = \sum_\alpha F_\alpha^{(k)} (I) e^{i(\alpha, \varphi)}, \qquad G_s = \sum_\alpha G_\alpha^{(s)} (I) e^{i(\alpha, \varphi)}; \qquad \alpha \in \mathbf{Z}^n$$

Ключевым множеством системы (4.1) назовем множество всех точек $I \in \mathbf{R}^m$, таких, что:

1) $(\omega(I), \xi) = \ldots = (\omega(I), \zeta) = 0$ с некоторыми целочисленными векторами $\xi, \ldots, \zeta$,

2) $\operatorname{rank} X < \operatorname{rank} Y$, где

$$X = \left\| \begin{matrix} F_\xi^{(1)} & \ldots & F_\xi^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F_\zeta^{(1)} & \ldots & F_\zeta^{(m)} \end{matrix} \right\|, \qquad Y = \left\| X \left| \begin{matrix} \sum \frac{\partial F_\xi^{(k)}}{\partial I_k} + i \sum \xi_s G_\xi^{(s)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum \frac{\partial F_\zeta^{(k)}}{\partial I_k} + i \sum \zeta_s G_\zeta^{(s)} \end{matrix} \right. \right\|$$

Подчеркнем, что в этом определении не предполагается линейная независимость векторов $\xi, \ldots, \zeta$.

Теорема 4. Если невозмущенная система невырождена и ключевое множество непусто, то система (4.1) не имеет интегрального инварианта с плотностью $\Sigma f_s \varepsilon^s$.

Это утверждение доказывается методом Пуанкаре ([7], гл. V). Будем исходить из уравнения (4.5), в котором w_0 - неизвестная гладкая функция переменных $I_1, \ldots, I_m$. Положим

$$w_1 = \sum W_\alpha(I) e^{i(\alpha, \varphi)}$$

По методу Фурье из уравнения (4.5) получаем серию равенств

$$\sum \frac{\partial w_0}{\partial I_k} F_\alpha^{(k)} + i(\alpha, \omega) W_\alpha = -\sum \frac{\partial F_\alpha^{(k)}}{\partial I_k} - i \sum \alpha_s G_\alpha^{(s)}; \quad \alpha \in \mathbf{Z}^n$$

Пусть теперь точка I принадлежит ключевому множеству. Полагая α равным $\xi, \ldots, \zeta$, получим серию алгебраических уравнений относительно производных $\partial w_0/\partial I_1, \ldots, \partial w_0/\partial I_m$. Условием ее разрешимости является равенство рангов матриц X и Y.

Рассмотрим простой пример. Пусть точка I_0 — положение равновесия векторного поля $\bar{F} = (F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(m)})$ и целочисленный вектор $\alpha = 0$. Тогда $\operatorname{rank} X = 0$, а $\operatorname{rank} Y = 1$, если при $I = I_0$ сумма $\Sigma \partial F_0^{(k)}/\partial I_k$ — дивергенция усредненной системы, линеаризованной в окрестности точки I_0 — отлична от нуля. В этом случае ключевое множество содержит точку I_0 и поэтому применима теорема 4. Отметим, что отсутствие интегрального инварианта в этом примере можно установить также при помощи теоремы 3 и следствия из теоремы 1.

Рассмотрим случай, когда уравнения (4.1) имеют первый интеграл в виде ряда: $H = H_0(I, \varphi) + \varepsilon H_1(I, \varphi) + \ldots$. В условиях теоремы 4 функция H_0 не зависит от φ и в точках ключевого множества

(5.1) $\qquad X \partial H_0/\partial I = 0$

Следовательно, если точка из ключевого множества не является критической для функции H_0, то в этой точке ранг матрицы X падает по крайней мере на единицу по сравнению с его максимально возможным значением.

Для доказательства применим снова метод Пуанкаре. Функция H_0 — первый интеграл невозмущенной системы, не зависящий от φ, так как эта система невырождена. В первом приближении по ε тождество $H^\cdot \equiv 0$ дает соотношение

$$\sum \frac{\partial H_0}{\partial I_k} F_k + \sum \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_s} \omega_s \equiv 0$$

Пусть $H_1 = \Sigma_\alpha h_\alpha(I) e^{i(\alpha, \varphi)}$. Применяя метод Фурье, приходим к серии равенств

$$\sum \frac{\partial H_0}{\partial I_k} F_\alpha^{(k)} + i(\alpha, \omega) h_\alpha = 0$$

эквивалентных (5.1), когда точка I принадлежит ключевому множеству.

6. Приложение к слабо неголономным системам. Теорему 4 можно модифицировать для случая вырожденных систем. Вместо рассуждений общего характера рассмотрим поучительный пример из неголономной механики. Исследуем неголономную систему с торическим пространством положений $T^3 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \bmod 2\pi\}$ и неголономной связью

$$\varphi_3^{\cdot} = \varepsilon\,(a_1\varphi_1^{\cdot} + a_2\varphi_2^{\cdot}) \tag{6.1}$$

Коэффициенты a_1 и a_2 — однозначные гладкие функции на T^3, ε — малый параметр. При $\varepsilon = 0$ будем иметь движение по двумерному тору $\varphi_3 = \mathrm{const}$. В этом случае система голономна и уравнения движения имеют естественную инвариантную меру. При малых значениях $\varepsilon \neq 0$ система будет мало отличаться от голономной.

Условие интегрируемости уравнения связи (6.1) в первом приближении по ε будет иметь вид

$$\partial a_1/\partial\varphi_2 - \partial a_2/\partial\varphi_1 = 0 \tag{6.2}$$

Разложим функции a_1 и a_2 в ряды Фурье по переменным φ_1 и φ_2:

$$a_s = \sum_k a^{(s)}_{k_1,\,k_2} \exp\,[i\,(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2)]$$

Коэффициенты $a_k^{(s)}$ — периодические функции переменной φ_3.

Условие (6.2) эквивалентно следующей цепочке соотношений, связывающих коэффициенты Фурье:

$$k_2 a^{(1)}_{k_1,\,k_2} - k_1 a^{(2)}_{k_1,\,k_2} = 0 \tag{6.3}$$

Рассмотрим теперь динамику неголономной системы со связью (6.1) и лангранжианом $L = (\varphi_1^{\cdot 2} + \varphi_2^{\cdot 2} + \varphi_3^{\cdot 2})/2$. С точностью до членов $o\,(\varepsilon)$ уравнения движения таковы:

$$\varphi_1^{\cdot} = I_1,\ \varphi_2^{\cdot} = I_2,\ \varphi_3^{\cdot} = \varepsilon\,(a_1I_1 + a_2I_2),\ I_1^{\cdot} = I_2^{\cdot} = 0 \tag{6.4}$$

Отметим, что невозмущенная система вырождена.

Изучим вопрос о существовании у системы (6.4) интегрального инварианта с плотностью в виде ряда $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \ldots$ с периодическими по φ коэффициентами. Запишем уравнение Лиувилля с точностью до $o\,(\varepsilon)$:

$$I_1\frac{\partial f}{\partial\varphi_1} + I_2\frac{\partial f}{\partial\varphi_2} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\varphi_3} f\,(a_1I_1 + a_2I_2) = 0 \tag{6.5}$$

Полагая $\varepsilon = 0$, получаем уравнение для f_0. Применяя метод Фурье, приходим к заключению, что f_0 зависит от I_1, I_2 и φ_3 (ср. [7], гл. V).

В первом приближении по ε уравнение (6.5) имеет вид

$$I_1\frac{\partial f_1}{\partial\varphi_1} + I_2\frac{\partial f_1}{\partial\varphi_2} + \frac{\partial}{\partial\varphi_3}(a_1I_1 + a_2I_2)\,f_0 = 0 \tag{6.6}$$

Применяя снова метод Фурье, положим $f_1 = \sum f_k^{\,1}\, e^{i(k,\varphi)}$. Равенство (6.6) дает серию уравнений для коэффициентов Фурье. На резонансных прямых $I_1 = \delta k_2$, $I_2 = -\delta k_1$ $(\delta \in \mathbf{R})$ будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_3} g_k(\varphi_3)\,f_0\,(\delta k_2, -\delta k_1, \varphi_3) = 0,\quad g_k = k_2a_k^{(1)} - k_1a_k^{(2)} \tag{6.7}$$

Ввиду (6.3) это условие заведомо выполнено для случая интегрируемости связи (6.1). Обратное неверно. Пусть, например, a_1 и a_2 не зависят от φ_3. Условие (6.3) в общем случае не выполнено, однако уравнение (6.7) имеет решение в виде функций f_0, не зависящих от φ_3.

Найдем условия разрешимости бесконечной цепочки уравнений (6.7) относительно функции f_0. Из (6.7) имеем

(6.8) $$f_0 g_k = c_k\,(\delta)$$

Возможны два случая: либо функция g_k имеет нуль на окружности $\mathbf{T}^1 = \{\varphi_3 \bmod 2\pi\}$, либо нулей нет. Так как c_k не зависит от φ_3, то в первом случае должно выполняться условие (6.3). Полагая в (6.8) $\delta = 0$, получаем, что во втором случае отношение функций g_k с разными значениями k не зависит от переменной φ_3. Эти условия являются достаточными для разрешимости системы (6.7).

Действительно, для значений k, отвечающих первому случаю, уравнение (6.7) заведомо выполнено. Во втором случае для некоторого вектора k полагаем $f_0 = c/g_k$. Знак постоянной c подбирается так, чтобы функция f_0 была положительной. Из условия постоянства отношений g_k вытекает, что функция f_0 удовлетворяет уравнениям (6.7) при других значениях k.

Для разрешимости исходного уравнения (6.6) необходимо потребовать выполнения дополнительных условий: свободные коэффициенты $a_0^{(1)}$ и $a_0^{(2)}$ либо тождественно обращаются в нуль, либо отношения $a_0^{(1)}/a_0^{(2)}$ и $a_0^{(s)}/g_k$ ($s = 1, 2$; $g_k \neq 0$) не зависят от φ_3.

Результат анализа уравнения (6.6) можно сформулировать в геометрической форме. Множество всех систем с лагранжианом $L = (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2)/2$ и со связью (6.1) имеет естественную структуру линейного пространства (изоморфного пространству пар гладких функций a_1 и a_2 на трехмерном торе). Все системы, обладающие интегральным инвариантом (в первом приближении по ε), образуют линейное подпространство $\mathbf{L}$. Точно так же, системы с интегрируемой связью (6.1) образуют линейное подпространство $\mathbf{L}' \subset \mathbf{L}$. Из анализа разрешимости уравнений (6.7) вытекает, что размерность фактор-пространства $\mathbf{L}/\mathbf{L}'$ равна бесконечности. Таким образом, системы с интегрируемой связью — редкое исключение среди систем, обладающих интегральным инвариантом.

В заключение рассмотрим системы Чаплыгина, для которых функции a_1 и a_2 не зависят от переменной φ_3. Они также образуют линейное подпространство; обозначим его $\mathbf{L}''$. Можно проверить, что для таких систем в первом приближении по ε выполнены все условия применимости метода приводящего множителя, гарантирующего существование интегрального инварианта [4]. Для систем Чаплыгина $g_k = \mathrm{const}$. Следовательно, $\mathbf{L}'' \subset \mathbf{L}$. Можно проверить, что размерность фактор-пространства $\mathbf{L}/\mathbf{L}''$ также равна бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат. 1949. 550 с.
2. *Халмош П. Р.* Лекции по эргодической теории. М.: Изд-во иностр. лит. 1959. 147 с.
3. *Козлов В. В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. Т. 8. Вып. 3. С. 85—107.
4. *Чаплыгин С. А.* Исследования по динамике неголономных систем. М.; Л.: Гостехиздат. 1949. 112 с.
5. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат. 1946. 655 с.
6. *Карапетян А. В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и об устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 42—51.
7. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука. 1971. 771 с.
8. *Аносов Д. В.* Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро колеблющимися решениями // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24. № 5. С. 721—742.

Москва

Поступила в редакцию 18.IX.1986