РАСЩЕПЛЕНИЕ СЕПАРАТРИС И РОЖДЕНИЕ ИЗОЛИРОВАННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ С ПОЛУТОРА СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В. В. Козлов

1. Рассматриваются уравнения Гамильтона

$$\dot{x}=H'_y, \quad \dot{y}=-H'_x; \quad (x,\ y)=z\in\mathbb{R}^2 \tag{1}$$

с гамильтонианом $H(z, t, \varepsilon) = H_0(z) + \varepsilon H_1(z, t) + o(\varepsilon)$. Функция H предполагается аналитической по z, t, ε и 2π-периодической по t. Предположим, что невозмущенная система с функцией Гамильтона H_0 удовлетворяет следующим двум условиям:

1) точка $z = 0$ — невырожденная критическая точка функции H_0 индекса 1 (седловая точка);

2) имеется ограниченная связная компонента w множества $\{z\colon H_0 = 0\}\setminus\{z\colon dH_0 = 0\}$, замыкание которой есть $w \cup \{0\}$.

Таким образом, точка $z = 0$ — неустойчивое равновесие невозмущенной системы, а кривая w — двоякоасимптотическая к ней траектория (петля сепаратрисы). Пусть $z_a(t)$ — одно из двоякоасимптотических решений невозмущенной системы (1). Введем 2π-периодическую функцию

$$J(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\{H_0,\ H_1\}(z_a(t+\lambda),\ t)\,dt,$$

где $\{\ ,\ \}$ — скобка Пуассона. Отметим, что

$$\frac{d^nJ}{d\lambda^n}=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\{H_0\{\ldots\{H_0,\ H_1\}\}\ldots\}}_{n+1}\,dt. \tag{2}$$

Поскольку среднее по периоду функции J равно нулю, то J должна обращаться где-то в нуль.

Пусть T_ε — отображение за период системы (1). Точка $\zeta\in\mathbb{R}^2$ — периодическая точка T_ε периода $m\in\mathbb{N}$, если $T_\varepsilon^m\,\zeta=\zeta$. Периодические точки и только они являются начальными значениями (при $t = 0$) для периодических решений системы (1). Периодическая точка ζ называется невырожденной, если собственные значения отображения $z\mapsto T_\varepsilon^m z$, линеаризованного в окрестности точки ζ, отличны от единицы. Отметим, что некритические ограниченные линии уровня функции H_0 составлены сплошь либо из вырожденных периодических, либо непериодических точек отображения T_0.

Теорема. *Предположим, что функция J имеет простой нуль. Тогда существует бесконечное число аналитических функций $\zeta_n\colon(-\varepsilon_n,\ \varepsilon_n)\to\mathbb{R}^2$, $\varepsilon_n>0$, таких, что:*

(1) $\zeta_n(\varepsilon)$ — периодическая точка отображения T_ε при всех $-\varepsilon_n<\varepsilon<\varepsilon_n$, невырожденная при $\varepsilon\neq 0$;

(2) $H_0(\zeta_n(0))<0$ и расстояние от точек $\zeta_n(0)$ до петли сепаратрисы w стремится к нулю при $n\to\infty$.

В общем случае последовательность ε_n сходится к нулю. Поэтому при достаточно малых значениях $\varepsilon\neq 0$ теорема гарантирует существование большого, но конечного, числа различных невырожденных периодических решений гамильтоновой системы (1). Отметим, что если все нули функции J простые, то устойчивая и неустойчивая сепаратрисы возмущенной неподвижной гиперболической точки $z_\varepsilon = O(\varepsilon)$ отображения T_ε трансверсально пересекаются при малых значениях $\varepsilon\neq 0$, образуя довольно запутанную сеть ([1], [2]). С помощью методов символической динамики доказывается существование бесконечного числа различных периодических точек отображения T_ε в окрестности петли w [3]. Эти периодические точки, однако, никак не связаны с точками $\zeta_n(\varepsilon)$.

2. Доказательство теоремы основано на применении метода малого параметра Пуанкаре. Для этого перейдем от переменных $z = (x, y)$ к каноническим переменным действие — угол I, φ mod 2π невозмущенной интегрируемой системы в области $\mathbb{R}^2$, определенной неравенствами $-c < H_0(z) < 0$, где c — малая положительная постоянная. В новых переменных $H = F_0(I) + \varepsilon F_1(I, \varphi, t) + o(\varepsilon)$, где $H_0(z) = F_0(I)$, $H_1(z, t) = F_1(I, \varphi, t)$. Функция H, разумеется, 2π-периодична по φ и t. Пусть $\omega(I) = (F_0)'$ — частота колебаний в невозмущенной системе. Легко понять, что $\omega \to 0$, когда линия уровня $H_0(z) = F_0(I)$ неограниченно приближается к петле сепаратрисы w. Следовательно, существует бесконечно много значений I_n таких, что $\omega(I_n) = 1/n$. Утверждается, что на инвариантных кривых $I = I_n$ при малых значениях ε как раз и происходит рождение невырожденных периодических точек $\zeta_n(\varepsilon)$ отображения T_ε, о которых говорится в теореме. Чтобы в этом убедиться, надо проверить выполнение условий известной теоремы Пуанкаре ([1], пп. 42, 74):

(А) $F_0''(I_n) \neq 0$, (Б) 2π-периодическая функция

$$f_n(\lambda) = \int_{-\pi n}^{\pi n} F_1\,(I_n,\ (t+\lambda)/n,\ t)\,dt$$

имеет невырожденную критическую точку.

Можно показать, что условие (А) выполнено при достаточно больших значениях n. Критические точки f_n совпадают с нулями функции

$$f_n' = \int_{-\pi n}^{\pi n} \{H_0,\ H_1\}\,(z_n\,(t+\lambda),\ t)\,dt,$$

где $z_n(\,\cdot\,)$ — $2\pi n$-периодическое решение невозмущенной задачи. Если $z_n(0) \to z_a(0)$ при $n \to \infty$, то равномерно по λ последовательность $f_n'(\lambda)$ сходится к $J(\lambda)$. Используя формулу (2), можно показать, что $f_n'' \to J'$ равномерно по λ. Поскольку, согласно предположению, функция J имеет простой нуль, то при достаточно большом n функции f_n будут обладать свойством (Б). Что и требовалось.

Отметим, что возмущенная система может не иметь невырожденных долгопериодических решений периода $2\pi/\omega = 2\pi n/m$ при $m \neq 1$. Точнее, существование таких решений не вытекает, вообще говоря, из рассмотрения возмущения первого порядка по ε. Примером может служить известная задача о плоских колебаниях спутника на слабоэллиптической орбите [4]. Трансверсальность пересечения сепаратрис при малых ненулевых значениях эксцентриситета орбиты установлена в работе [5].

3. С помощью теоремы п. 1 можно установить наличие семейств невырожденных периодических решений в гамильтоновых системах, неинтегрируемость которых доказана с помощью метода расщепления сепаратрис. Ряд примеров таких систем указан в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. труды, Т. I//М: Наука, 1972.
[2] Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// УМН.— 1983.— Т. 38, Вып. 1.— С. 3—67.
[3] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику//М.: Мир.— 1975.
[4] Сарычев В. А., Златоустов В. А. Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты//Препринт № 48.— М.: Ин-т прикл. мат.— 1975.
[5] Буров А. А. Неинтегрируемость уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите//Вестн. МГУ. Сер. мат., мех.— 1984.— № 1. —С. 71—73.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в Правление общества 10 января 1985 г.