ПРЕДИСЛОВИЕ

Основу сборника составляют работы, представленные на VII тематической конференции "Геометрия, дифференциальные уравнения и механика" (февраль 1985 года). Конференция организована по инициативе Совета молодых ученых механико-математического факультета. Оргкомитет конференции возглавляли проф. В.В.Козлов и проф. А.Т. Фоменко.

Работа конференции проходила по трем секциям: дифференциальная геометрия и приложения, аналитическая механика, вопросы интегрируемости и неинтегрируемости динамических систем.

Тематика исследований, представленных на конференции, широка и актуальна. В статьях, относящихся к геометрии, изучаются проблемы теории групп Ли, теории минимальных поверхностей, алгебраической топологии, теории динамических систем и некоторых других разделов геометрии. Работы по механике посвящены динамике твердого тела, теории устойчивости и вопросам интегрируемости гамильтоновых систем.

Статьи проф. В.В. Козлова и проф. А.Т. Фоменко, содержащие обзор круга вопросов современной геометрии и механики и постановку новых задач, специально написаны для этого сборника.

В.В. КОЗЛОВ

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

"Я прошу читателя представить себе, что он слушает рассказ, цель которого вновь пробудить интерес к одной из полезных, но в данное время не модных областей математики"

П.Халмош

Эта статья знакомит читателя с некоторыми новыми аспектами теории динамических систем, а также напоминает старые, еще пока нерешенные, задачи в этой области. Речь пойдет о трех концепциях общего характера: представление Гейзенберга динамических систем (эквивалентные термины: представление Лакса, метод изоспектральной деформации, метод $L-A$ пары), распознавание гамильтоновости динамических систем, "квазиинтегралы", призванные заменить несуществующие интегралы в неинтегрируемых системах. Статья состоит из трех очерков. Материал первого из них навеян лекцией С.П.Новикова [I] .

I. Представление Гейзенберга. Рассмотрим динамическую систему на многообразии M , заданную гладким векторным полем v . Движениями являются гладкие отображения $x: \mathbb{R} \to M$, удовлетворяющие уравнению $\dot{x}(t) = v(x(t))$ для всех t . Представлением Гейзенберга этой системы назовем пару квадратных матриц L и A , удовлетворяющих следующим условиям:

(I) элементы матриц L и A - гладкие (комплекснозначные функции на M ;

(2) выполнено тождество

$$\dot{L} = [A, L] \qquad (I.I),$$

где элементы матрицы $\dot{L}$ суть производные от элементов вдоль векторного поля v , а $[A, L] = AL - LA$.

Ясно, что движения динамической системы (M, v) удовлетворяют уравнению (I.I). Чтобы исключить тривиальные случаи (например, $L = 0$), введем понятие точного представления, когда все решения уравнения (I.I) являются движениями системы (M, v).

Дифференциальные уравнения вида (I.I) встретились во всей общности впервые, вероятно, в квантовой механике в связи с анализом гейзенберговой картины движения, когда наблюдаемые зависят от времени, а состояния нет.

Т е о р е м а I.I [2] . Собственные числа матрицы L являются интегралами динамической системы (M, v).

Доказательство основано на следующем факте: если X и Y - конечномерные матрицы, то $\operatorname{tr} XY = \operatorname{tr} YX$. Умножим обе части уравнения (I.I) на kL^{k-1}

$$k L^{k-1} \dot{L} = (L^k)^{\cdot} = k\left((L^{k-1}A)L - L(L^{k-1}A)\right).$$

Тогда $(\operatorname{tr} L^k)^{\cdot} = 0$. Следовательно, следы степеней матрицы - интегралы системы (M, v). Для завершения доказательства осталось вспомнить, что коэффициенты характеристического уравнения $|L - \lambda E_m| = 0$ однозначно определяются следами $\operatorname{tr} L^k$, $1 \leq k \leq m$.

Теорема I.I хорошо известна в квантовой механике в связи с переходом от картины движения Гейзенберга к картине Шредингера. Следует подчеркнуть, что вопрос о независимости интегралов, получаемых по теореме I.I, каждый раз должен решаться отдельно. С помощью представления Гейзенберга решен ряд новых задач классической механики (см., например, [3]). Оказывается, представление Гейзенберга не только помогает найти полный набор независимых интегралов, но и осуществить явное интегрирование уравнений движения (см. [4]).

Приведем примеры представлений Гейзенберга некоторых дифференциальных уравнений классической механики. Вращение свободного твердого тела описывается уравнением Эйлера:

$$\dot{m} = m \times \omega \qquad (I.2)$$

где ω - угловая скорость тела, $m = I\omega$ - угловой момент, I - оператор инерции. Каждому вектору a трехмерного ориентированного евклидова пространства с координатами a^{α}

можно поставить в соответствие кососимметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a^1 & a^2 \\ a^1 & 0 & -a^3 \\ -a^2 & a^3 & 0 \end{pmatrix}$$

При таком соответствии векторное умножение переходит в коммутатор матриц. Следовательно, уравнение (I.2) можно записать в виде матричного уравнения $\dot{M}=[\Omega,M]$. Так что в этом случае представление Гейзенберга точное. Следы матриц M, M^2 и M^3 равны $0, -2(m,m)$ и 0.

Этот пример можно обобщить. Пусть G – n – мерная группа Ли и $\mathcal{L}$ – гладкая вещественная функция на $G \times \mathbb{R}^n$, зависящая, возможно, явно от времени. Пусть $v_1, \dots v_n$ – набор независимых левоинвариантных полей на G и $[v_i, v_j] = c_{ij}^k v_k$. Если $x^1, \dots x^n$ – локальные координаты на G, то от переменных $x^s, \dot{x}^s$ естественно перейти к новым координатам x^s, ω^s на $G \times \mathbb{R}^n$ с помощью формул $\dot{x}^s = \omega^\alpha v_\alpha (x^s)$. Если $f: G \to \mathbb{R}$, то $\dot{f} = \omega^\alpha v_\alpha (f)$. Функцию $\mathcal{L}$ можно, следовательно, представить в координатах x^s, ω^s. Уравнения движения механической системы на G с лагранжианом $\mathcal{L}$ можно записать в виде уравнений Пуанкаре [5]:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^s}\right)^{\cdot} = c_{is}^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^j}\omega^i + v_s(\mathcal{L}) \quad (I.3),$$

где $v(\mathcal{L})$ – производная Ли функции $\mathcal{L}$ вдоль векторного поля v_s. Полагая

$$m_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^s}$$

введем две матрицы L и A с элементами

$$L_{ks} = c_{ks}^\alpha m_\alpha, \quad A_k^s = c_{k\alpha}^s \omega^\alpha.$$

Если интерпретировать ω^α как координаты касательного вектора ω в базисе $v_1, \dots v_n$, то матрица A_k^s задает присоединенное представление $ad\,\omega$ алгебры $\mathfrak{g}$ группы G.

Т е о р е м а I.2. Движения лагранжевой системы $(G, \mathcal{L})$ удовлетворяют матричному уравнению

$$\dot{L} = [A, L] + B \quad (1.4),$$

матрица B составлена из элементов $B_{ij} = [v_i, v_j](\mathcal{L})$.

Для того чтобы получить уравнение (I.4), надо умножить уравнение (I.3) на C_{ij}^{s}, просуммировать по s и воспользоваться тождеством Якоби для структурных постоянных алгебры $\mathfrak{g}$.

Если функция Лагранжа $\mathcal{L}$ инвариантна относительно левых сдвигов на G (т.е. $v_s(\mathcal{L}) \equiv 0$), то $\mathcal{L}$ зависит лишь от переменных ω^α и матрица $B = 0$. В этом случае уравнения Пуанкаре являются замкнутой системой уравнений на алгебре $\mathfrak{g}$ и матрицы A и L являются их представлением Гейзенберга. Это представление точно не всегда; если G коммутативна, то уравнение (I.4) вырождается в тривиальное тождество. Однако, представление Гейзенберга является точным для случая, когда алгебра $\mathfrak{g}$ проста (как в примере с задачей Эйлера).

В связи с обсуждаемыми вопросами возникает интересная задача: когда динамическая система допускает точное представление Гейзенберга. Из теоремы о выпрямлении вытекает положительное решение этой задачи в малой окрестности неособой точки. Это утверждение, правда, малосодержательно: задача о точном представлении Гейзенберга представляет интерес либо в окрестности положения равновесия, либо в достаточно больших областях фазового пространства, где траектории обладают свойством возвращаемости. Свойство системы иметь представление Гейзенберга инвариантно по отношению к заменам времени вдоль траекторий. Действительно, перейдем к новому времени τ, положив $dt = f d\tau, f \neq 0$. Тогда уравнение (I.I) перейдет в уравнение

$$\frac{dL}{d\tau} = [\hat{A}, L], \quad \hat{A} = fA .$$

Таким образом, наличие представления Гейзенберга связано лишь со структурой расслоения фазового пространства на траектории динамической системы.

Может показаться, что необходимым условием существования представления Гейзенберга является наличие у динамической системы нетривиальных первых интегралов (теорема I.I). Это, однако, не так. Рассмотрим для примера эргодическую систему на $\mathbb{T}^n = \{x^1, \ldots, x^n \bmod 2\pi\}$:

$$\dot{x}^s = \lambda^s,$$

где $\lambda^1, \dots \lambda^n$ – нерезонансный набор вещественных чисел /т.е. из равенства $k_i \lambda^i = 0$ с целыми k_i вытекает, что все $k_i = 0$ /. Полагая $y^s = \exp(i x^s)$, перепишем эти уравнения в виде

$$\dot{y}^s = i\lambda^s y^s \quad (1 \leq s \leq n) \qquad (1.5)$$

Каждое такое уравнение допускает точное представление Гейзенберга с матрицами

$$L_s = \begin{pmatrix} y^s & y^s \\ -y^s & -y^s \end{pmatrix}, \quad A_s = \begin{pmatrix} 0 & -i\lambda^s/2 \\ -i\lambda^s/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы L и A для всей системы (I.5) имеют блочный вид:

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}.$$

Легко понять, что все $\operatorname{tr} L^k = 0$.

Это рассуждение можно распространить на динамические системы в прямом произведении $D \times \mathbb{T}^n$, где D – область в $\mathbb{R}^k = \{y^1, \dots y^k\}$, заданные уравнениями

$$\dot{x}^s = \lambda^s(y^1, \dots y^k), \; \dot{y}^m = 0; \; 1 \leq s \leq n, \; 1 \leq m \leq k \qquad (I.6)$$

К уравнениям такого типа обычно приводятся интегрируемые системы в различных задачах классической механики.

Т е о р е м а I.3. Дифференциальные уравнения (I.6) обладают точным представлением Гейзенберга.

С л е д с т в и е I.4. Вполне интегрируемая гамильтонова система в окрестности компактных инвариантных многообразий имеет точное представление Гейзенберга.

С л е д с т в и е I.5. Пусть дифференциальные уравнения

$$\dot{x}^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots x^n), \quad 1 \leq \alpha \leq n \qquad (I.7)$$

имеют инвариантную меру с положительной плотностью и $(n-2)$ независимых интегралов $F_1, \dots F_{n-2}$. Тогда в окрестности компактных интегральных многообразий $M_c = \{x \in \mathbb{R}^n : F_1(x) = c_1, \dots, F_{n-2}(x) = c_{n-2}\}$, не содержащих положений равновесия, система (I.7) имеет точное представление Гейзенберга.

На практике представление Гейзенберга обычно существует во всем фазовом пространстве интегрируемой системы, а не только в окрестности неособых инвариантных многообразий.

Рассмотрим теперь задачу о представлении Гейзенберга в окрестности положения равновесия аналитической системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = \Lambda x + \dots, x \in \mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а I.6. *Предположим, что собственные числа* $\lambda_1, \dots \lambda_n$ оператора Λ различны и нерезонансны. Тогда динамическая система имеет точное "формальное" представление Гейзенберга матрицами L и A, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1/2 & & & \\ -\lambda_1/2 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -\lambda_n/2 \\ & & & -\lambda_n/2 & 0 \end{pmatrix}$$

а элементы матрицы L – формальные степенные ряды переменных x^α.

Напомним, что набор чисел $\lambda_1, \dots \lambda_n$ называется нерезонансным, если эти числа не удовлетворяют ни одному уравнению $\lambda_s = k^i \lambda_i$ с целыми $k^i \geq 0$, $\sum k^i \geq 2$.

Теорема I.6 есть следствие теоремы Пуанкаре о формальной приводимости уравнений $\dot{x} = \Lambda x + \dots$ к своей линейной части $\dot{y} = \Lambda y$. Если собственные числа Λ различны, то Λ можно считать диагональной матрицей с диагональными элементами $\lambda_1, \dots \lambda_n$. Осталось воспользоваться фактом о наличии точного представления Гейзенберга для линейной системы (I.5).

Хорошо известно, что в малой окрестности положения равновесия векторное поле биголоморфно своей линейной части, если выполнено одно из двух следующих условий /см., например, [6] /:

(I) условие Пуанкаре: выпуклая оболочка точек $\lambda_1, \dots \lambda_n$ на комплексной плоскости не содержит нуля;

(2) условие Зигеля: $|\lambda_s - k^i \lambda_i| \geq c/|k|^\gamma$ для некоторых $c, \gamma > 0$

В этих случаях элементы матрицы L – голоморфные функции переменных x^α. Неясно, справедлив ли этот результат в общем нерезонансном случае? Интересно было бы выяснить вопрос о наличии точного представления Гейзенберга для дифференциальных уравнений, приведенных к резонансной нормальной форме.

2. <u>Гамильтоновость динамических систем</u>. Пусть (M,ω) – симплектическое многообразие: M – гладкое многообразие, ω – замкнутая невырожденная 2-форма на M. В силу невырожденности ω каждой функции $H: M \to \mathbb{R}$ (или, более обще $H: M \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$) можно поставить в соответствие единственное векторное поле v_H такое, что $\omega(v_H, \cdot) = dH$. Это поле называется гамильтоновым, а динамическая система (M, v_H) – гамильтоновой системой. Согласно теореме Дарбу, в некоторых локальных координатах x^s, y^s на M (называемых симплектическими) форма ω имеет "канонический" вид $\sum dy^s \wedge dx^s$. Дифференциальные уравнения Гамильтона $\dot{z} = v_H(z)$, записанные в симплектических координатах, принимают привычный вид:

$$\dot{x}^s = \frac{\partial H}{\partial y^s}, \quad \dot{y}^s = -\frac{\partial H}{\partial x^s}$$

Если дифференциальные уравнения, представленные в некоторых локальных координатах на M, не имеют такого вида, то это еще не означает, что они не гамильтоновы. Приведем примеры динамических систем, гамильтоновость которых априори не очевидна.

(а) В качестве первого примера рассмотрим линейную систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

имеющую первый интеграл $f = (Bx, x)/2$, где B – невырожденный симметричный оператор.

Т е о р е м а 2.1. Если $\det A \neq 0$, то

(1) $(\mathbb{R}^n, \omega)$, $\omega(x', x'') = (BA^{-1}x', x'')$ – симплектическое многообразие;

(2) векторное поле Ax гамильтоново с функцией Гамильтона f.

Доказательство. Так как f – интеграл уравнений (2.1), то $\dot{f} = (Bx, Ax) = (x, BAx) \equiv 0$. Следовательно, BA – кососимметричный оператор. Отсюда вытекает, в свою очередь, кососимметричность оператора BA^{-1}. Из невырожденности A и B следует невырожденность внешней 2-формы ω. Эта форма замкнута как всякая внешняя форма с постоянными коэффициентами. Осталось заметить, что

$$\omega(Ax, \cdot) = (BA^{-1}(Ax), \cdot) = (Bx, \cdot) = df$$

(в) Рассмотрим уравнение Пуассона из динамики твердого тела

$$\dot{e} = e \times \omega, \qquad (2.2)$$

где e и ω – векторы трехмерного ориентированного евклидова пространства, причем ω – известная функция времени. Уравнение (2.2) имеет интеграл $(e, e) = c \geqslant 0$. Поскольку в динамике твердого тела e является единичным вектором, то положим $c = 1$. Снабдим сферу $S^2 = \{e : (e,e) = 1\}$ симплектической структурой, положив $\omega(x', x'') = (e, x' \times x'')$, где x' и x'' – касательные векторы к S^2 в точке e. Форма ω – ориентированная площадь S^2 – замкнута и невырождена, но не точна:

$$\int_{S^2} \omega = 4\pi.$$

Векторное поле $v = e \times \omega(t)$ является нестационарным касательным полем на S^2.

Т е о р е м а 2.2. Уравнение (2.2) является уравнением Гамильтона на симплектическом многообразии (S^2, ω) с гамильтонианом $H = -(e, \omega(t))$.

Действительно, $\dot{\omega}(v, \cdot) = (e, (e \times \omega) \times (\cdot)) = (\cdot, e \times (e \times \omega)) =$
$$= (\cdot, e(\omega, e) - \omega) = -(\cdot, \omega) = dH$$

Любопытно отметить, что если $e = a(t)$ – решение уравнений (2.2), то функция $f = (a(t), e)$ является их первым интегралом. Если ω – p – периодическая функция времени, то отображение за период линейной системы (2.2) сохраняет ориентированную площадь S^2 и, следовательно, имеет по меньшей мере две различные неподвижные точки (теорема А.И.Шнирельмана-Н.А.Никишина). В этом случае имеется интеграл, p -периодический по t.

(с) Рассмотрим, следуя Биркгофу, "обобщенную проблему Пфаффа" о стационарных кривых функционала

$$P(x(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} (u_i \cdot \dot{x}^i + B)\, dt.$$

Здесь u_i, B – некоторые гладкие функции переменных $x^1, \dots, x^n$ и t (см. [7,8]). Нетрудно показать, что вариационное уравнение $\delta P = 0$ $(\delta x^i(t_1) = \delta x^i(t_2) = 0)$ определяет переменные x^i как функции t, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathrm{rot}\, u)\dot{x} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \mathrm{rot}\, u = \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right\|. \quad (2.3)$$

Матрица $\mathrm{rot}\, u$ предполагается невырожденной для всех рассматриваемых x^i и t. Так что n четно и уравнения (2.3) однозначно определяют нестационарное векторное поле в переменных $x^1, \dots, x^n$.

Т е о р е м а 2.3. [9] В подходящей симплектической структуре уравнения (2.3) гамильтоновы с функцией Гамильтона B.

Если, например, u_α не зависят явно от t, то уравнения (2.3) гамильтоновы на симплектическом многообразии $(\mathbb{R}^n = \{x^i\}, \omega)$, $\omega = d(u_\alpha dx^\alpha)$. Описание симплектической структуры в неавтономном случае содержится в работе [9]. Постановка задачи о гамильтоновости уравнений (2.3) принадлежит Биркгофу. Им исследован вопрос о приведении (2.3) к каноническому виду в окрестности положения равновесия с помощью формальной замене независимых переменных [7].

"Распознавание" гамильтоновости конкретной динамической системы может оказаться трудным делом. Приведем две относящиеся сюда нерешенные задачи.

А. Задача Чаплыгина о качении динамически несимметричного уравновешенного шара по горизонтальной шероховатой плоскости [10]. Уравнения качения описываются следующей системой дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^6 = \{\omega, e\}$:

$$\dot{k} + \omega \times k = 0, \quad \dot{e} + \omega \times e = 0, \quad k = I\omega + ma^2 e \times (\omega \times e) \quad (2.4)$$

здесь ω – угловая скорость шара, e – единичный вектор вертикали, I – оператор инерции, m – масса шара, a – его радиус. Формально при $a = 0$ эта задача совпадает с задачей Эйлера о вращении тела по инерции.

Неголономная система Чаплыгина, по-видимому, не является гамильтоновой. Однако можно расширить постановку задачи о приводимости, если включить дополнительно замены времени вдоль траекторий. Такой способ сведения неголономных систем к гамильтоновым использовал Чаплыгин в своей теории приводящего множителя [10].

В. Задача о вращении твердого тела в однородном магнитном поле с учетом эффектов намагничивания типа Барнетта-Лондона (см., например, [11]). Уравнения вращения сводятся к системе

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = (\Lambda\omega)\times e, \quad \dot{e} + \omega \times e = 0. \qquad (2.5)$$

Здесь снова I – оператор инерции, а Λ – некоторый симметричный оператор, характеризующий свойства намагничивания тела. Если $\Lambda = \lambda E$, то уравнения (2.5) сводятся к уравнениям Кирхгофа задачи о движении твердого тела в идеальной жидкости, гамильтоновость которых общеизвестна (см., например, [12]). Вопрос о гамильтоновости системы (2.5) в общем случае остается пока открытым.

Гамильтоновость уравнений (2.4) и (2.5) следует изучать на четырехмерных интегральных многообразиях $\{\omega, e : (I\omega, e) = c, (e,e) = 1\}$ (ср. с [12]). Отметим, что система (2.4) интегрируема, а система уравнений (2.5) интегрируема не при всех значениях входящих в нее параметров.

3. <u>Квазиинвариантные функции сохраняющих меру преобразований</u>. Здесь речь пойдет об измеримых преобразованиях f полного пространства (M, μ), сохраняющих меру μ. Предполагается, что $\mu(M) < \infty$. Особый интерес представляет случай, когда M является гладким многообразием (возможно, с краем), μ – мера Лебега с гладкой положительной плотностью, и f – диффеоморфизм M. Эта ситуация возникает в гладких динамических системах с инвариантной мерой при анализе отображения последования Пуанкаре. Сперва отметим простое

Предложение 3.1. Отображение $f: M \to M$ не является эргодическим тогда и только тогда, когда существует функция $F \in L_2(M)$ со следующими свойствами:

(α) $F(f(x)) = F(x)$ для почти всех $x \in M$;

(β) $\int_M F\,d\mu = 0$, $\int_M F^2\,d\mu = 1$.

Причина неэргодического поведения гладкой динамической системы зачастую связана с наличием первых интегралов. Ограничение первого интеграла на секущую поверхность дает непостоянную гладкую функцию F, инвариантную относительно отображения последования Пуанкаре. Подбором вещественных постоянных a и b можно добиться того, чтобы инвариантная функция $aF+b$ удовлетворяла условию (β) предложения 3.1.

Пусть теперь преобразование f эргодично. Тогда оно не имеет непостоянных интегрируемых инвариантных функций. В связи с этим естественно рассмотреть задачу об отыскании

$$\inf_F \| F(f(\cdot)) - F(\cdot) \| , \qquad (3.1)$$

где $\|\cdot\|$ – некоторая норма (скажем, в L_2). Нижняя грань вычисляется на множестве функций с нулевым средним из единичного шара гильбертова пространства $L_2(M)$. В случае гладких отображений в качестве нормы $\|\cdot\|$ можно взять, например, стандартную норму пространства $C^0(M)$.

Т е о р е м а 3.2. Если $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(M)$, то нижняя грань (3.1) равна нулю.

Это утверждение можно вывести из теоремы о плотности периодических (следовательно, неэргодических) преобразований в множестве всех сохраняющих меру преобразований относительно равномерной топологии (см. [13]).

Из-за некомпактности единичного шара в L_2 нижняя грань (3.1) не достигается, однако существует "минимизирующая" последовательность функций F_n , такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \| F_n(f(\cdot)) - F_n(\cdot) \| = 0.$$

Последовательность $\{F_n\}$ естественно назвать "квазиинвариантной функцией" для отображения f . Ясно, что $\{F_n\}$ расходится в L_2 (в смысле определения сильной сходимости); однако эта последовательность может оказаться сходящейся к некоторой обобщенной функцией в подходящем расширении пространства L_2 .

Функции F_n практически сохраняют свои значения на ограниченных участках траектории точки x – последовательности $\{f^s(x)\}, 0\le s\le m$, если n достаточно велико (много больше m). В простых задачах квазиинвариантные функции удается явно вычислить и это обстоятельство можно использовать для качественного анализа поведения траекторий.

Пусть $1, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ – ортонормированный базис в пространстве $L_2(M)$. Фиксируя натуральное n , рассмотрим конечномерное подпространство H_n функций в L_2 вида

$$\sum_{s=1}^{n} c_s \varphi_s\ , \quad \sum_{s=1}^{n} c_s^2 = 1 .$$

Среднее значение каждой функции из H_n, очевидно, равно нулю. Положим

$$\lambda_n = \inf_{H_n} \| F(f(\cdot)) - F(\cdot) \| .$$

Ввиду теоремы 3.2, последовательность λ_n сходится к нулю. Пусть $g: M \to M$ – еще одно преобразование, сохраняющее меру μ, и

$$\nu_n = \inf_{H_n} \| F(g(\cdot)) - F(\cdot) \| .$$

Если $\nu_n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$, то можно сказать, что преобразование f является "более эргодическим" по сравнению с преобразованием g. Возникающая при этом шкала сравнения степеней эргодичности преобразований существенно зависит от выбора базиса в L_2.

Рассмотрим теперь наиболее "популярные" примеры сохраняющих меру преобразований и вычислим для них квазиинвариантные функции. Эргодические свойства этих преобразований обсуждаются в книге [13].

(a) Пусть $\mathbb{T}^1 = \{x \bmod 2\pi\}$ – окружность и $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ – сдвиг точек окружности на угол α. Если $\alpha/2\pi = p/q$, где $p, q \in \mathbb{Z}$, то $\exp(iqx)$ является инвариантной функцией для f_α, удовлетворяющей условию (b) предложения 3.1. Если же $\alpha/2\pi$ иррационально, то f_α – эргодическое преобразование. Оно имеет дискретный спектр: функции $\{\exp(inx)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, составляющие ортонормированный базис $L_2(\mathbb{T}^1)$, являются собственными функциями унитарного оператора $F(\cdot) \mapsto F(f_\alpha(\cdot))$ с собственными значениями $\{\exp(in\alpha)\}$. Так как $\alpha/2\pi$ иррационально, то точки $n\alpha$ всюду плотны на $\mathbb{T}^1$. Следовательно, найдутся последовательности чисел m_k, n_k, такие, что $|n_k\alpha - 2\pi m_k|$ сходится к нулю. Но тогда

$$|\exp(in_k f_\alpha(x)) - \exp(in_k x)| = |\exp i(n_k\alpha - 2\pi m_k) - 1| \to 0 \qquad (3.2)$$

при $k \to \infty$. Таким образом, последовательность функций $\exp(in_k x)$, $k = 1, 2, \ldots$ является квазиинвариантной функцией преобразования f_α. "Степень эргодичности" f_α, определяется скоростью приближения $\alpha/2\pi$ рациональными числами.

Это рассуждение без всяких изменений переносится на сдвиги n-мерного тора $\mathbb{T}^n = \{x_1, \ldots, x_n \bmod 2\pi\}$, определяемые формулой $x_i \mapsto x_i + \alpha_i$ — с рационально независимыми $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Может показаться, что в этом примере наличие квазиинвариантной функции связано со свойством плотности неэргодических преобразований в семействе $f_\alpha, \alpha \in R$. Однако приведенное выше рассуждение использует на самом деле лишь дискретность спектра. Действительно, дискретный спектр эргодического преобразования представляет собой подгруппу группы вращений окружности (см., например, [13]). Если эта подгруппа замкнута, то преобразование неэргодично. В эргодическом случае спектр заполняет единичную окружность всюду плотно, поэтому существует последовательность собственных значений, сходящихся к единице. Квазиинвариантной функцией будет последовательность собственных функций унитарного оператора, отвечающих этим собственным значениям.

(b) В примере (a) преобразование f_α не является перемешивающим. Простейшим примером перемешивающего преобразования является автоморфизм Бернулли единичного отрезка — $f: x \mapsto 2x \bmod 1$. Для построения квазиинвариантной функции рассмотрим ортонормированную систему функций Радемахера на отрезке $[0,1]$:

$$\varphi_m(x) = (-1)^{[2^m x]}$$

Ясно, что $\varphi_m(f(x)) = \varphi_{m+1}(x)$ для всех $x \in [0,1]$. Положим

$$F_n = (\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1})/\sqrt{n}.$$

Легко проверить, что

$$\int_0^1 F_n\,dx = 0, \quad \int_0^1 F_n^2\,dx = 1.$$

Так как

$$|F_n(f(x)) - F_n(x)| = |\varphi_n - \varphi_1|/\sqrt{n} \le 2/\sqrt{n}, \qquad (3.3)$$

то последовательность $\{F_n\}$ является квазиинвариантной функцией автоморфизма Бернулли.

Изоморфным представлением автоморфизма Бернулли является эндоморфизм окружности $T^1 = \{x \bmod 2\pi\}$, при котором точка x переходит в точку $2x$. Пусть $\{\exp(inx)\}, n \in \mathbb{Z}$ — ортонормированный базис в $L_2(T^1)$. Легко проверить, что последовательность тригонометрических полиномов

$$F_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \exp (i 2^k x) \right) / \sqrt{n}$$

является квазиинвариантной функцией этого эндоморфизма. Ясно, что функции F_n удовлетворяют оценке (3.3). Положим $m = 2^n$. Тогда для пространства функций

$$\sum_{s=1}^{m} c_s \exp (isx), \quad \sum_{s=1}^{m} c_s^2 = 1$$

число λ_m, определенное выше, имеет порядок

$$2 / \sqrt{\log_2 m} \qquad (3.4)$$

В том же подпространстве $L_2(T^1)$ можно вычислить λ_m для преобразования f_α из п. (a). Используя теорему Дирихле о приближении рациональными числами и формулу (3.2), нетрудно получить, что в этом случае $\lambda_m < 2/m$ при больших m. Последовательность этих чисел убывает с ростом m значительно быстрее последовательности (3.4).

($б$) Рассмотрим еще один пример гладкого обратимого перемешивающего преобразования. Это - линейный автоморфизм двумерного тора $T^2 = \{x, y \mod 2\pi\}$, заданный матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим последовательность векторов

$$\begin{pmatrix} u_s \\ v_s \end{pmatrix} = A^s \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad s = 1, 2, \dots,$$

где u, v - некоторые целые числа, не равные одновременно нулю. Нетрудно понять, что последовательность

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=0}^{n-1} \exp \left(i (u_s x + v_s y) \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

является квазиинвариантной функцией рассматриваемого автоморфизма.

Этот пример легко обобщается на многомерный случай заменой матрицы A на любую целочисленную унимодулярную матрицу. Отметим еще, что автоморфизм, заданный матрицей A, является классическим примером структурно устойчивого диффеоморфизма (см. [14, 6]).

В связи с этими примерами возникает следующая задача: можно ли в случае гладких преобразований заменить в теореме 3.2 норму из L_2 равномерной нормой пространства функций, непрерывных на M.

2-1639

Литература

1. Новиков С.П. – В кн.: Нерешенные задачи механики и прикладной математики, Изд-во Моск. ун-та, 1977, с.115-121.
2. Лакс П. – В кн.: Математика, 1969, т.13, вып.5, с.128-150.
3. Moser J. – Adv. Math., 1975, v.16, p.197 – 220.
4. Bogoyavlensky O.I. – Commun. Math. Phys., 1984, № 94, p.255-269.
5. Poincaré H. – Compt. rend. Acad. sci. Paris, 1901, v.132, p.369-371.
6. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. Биркгоф Дж. Динамические системы. М.-Л.: ГИТТЛ, 1941.
8. Santilli R.M. Foundations of theoretical mechanics. II. Birkhoffian generalization of Hamiltonian mechanics. N.Y., 1983
9. Козлов В.В. – Вестн. Моск. ун-та, сер. матем.-механ., 1983, № 6, с.10-22.
10. Чаплыгин С.А. Исследования по динамике неголономных систем. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
11. Самсонов В.А. – Изв. АН СССР, МТТ, 1984, № 4, с.32-34.
12. Новиков С.П. – УМН, 1982, т.37, вып.5, с.3-49.
13. Халмош П.Р. Лекции по эргодической теории. М.: ИЛ, 1959.
14. Аносов Д.В. – Труды матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1967, т.90, с.3-209.