УДК 531.38

В. В. Козлов, Д. В. Трещев

НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ О ВРАЩЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ. II *

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $\Phi \sim \Phi_0(p, q) + \varepsilon\Phi_1(p, q) + \ldots$ — формальный первый интеграл уравнений Гамильтона с гамильтонианом $F_0(p) + \varepsilon F_1(p, q)$, 2π-периодический по q_1 и q_2.

Лемма 7. *Функция Φ_0 не зависит от q_1, q_2, и функции $\Phi_0(p)$ и $F_0(p)$ зависимы в точках векового множества* $\mathbf{B}$.

Лемма 7 обобщает известное утверждение Пуанкаре о зависимости функций Φ_0 и F_0 на множестве $\mathbf{B}_1$ (см. [2], п. 82).

* Настоящая статья является продолжением работы [1].

Доказательство. Поскольку функция Φ_0 — первый интеграл невозмущенной задачи, удовлетворяющей условию невырожденности

$$\det\left\|\frac{\partial^2 F_0}{\partial p_i \partial p_j}\right\| \neq 0,$$

Φ_0 не зависит от углов q_1 и q_2 (см. [2], п. 82). Пусть точка p^0 принадлежит $\mathbf{B}_n$ и не лежит ни на одной прямой из множеств $\mathbf{B}_s$, $s<n$. Согласно теории возмущений, в малой окрестности p^0 можно найти каноническое преобразование

$$p_1, p_2;\ q_1, q_2 \bmod 2\pi \to I_1, I_2;\ \varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi,$$

аналитическое по ε, приводящее функцию Гамильтона $F_0(p)+\varepsilon F_1(p, q)$ к виду

$$V_0(I)+\varepsilon V_1(I)+\ldots+\varepsilon^{n-1} V_{n-1}(I)+\varepsilon^n V_n(I, \varphi)+\ldots \tag{21}$$

Поскольку при $\varepsilon=0$ это преобразование является тождественным, $V_0(I_1, I_2)=F_0(I_1, I_2)$. Для того чтобы привести V_n к виду, не зависящему от углов φ_1, φ_2, выполним еще одно преобразование $I, \varphi \bmod 2\pi \to J, \psi \bmod 2\pi$ с производящей функцией $S(J, \varphi, \varepsilon)=J\varphi+\varepsilon^n S_n(J, \varphi)+\ldots$ Периодическая по φ функция S_n будет удовлетворять уравнению (ср. его с (6))

$$\frac{\partial V_0}{\partial J_1}\frac{\partial S_n}{\partial \varphi_1}+\frac{\partial V_0}{\partial J_2}\frac{\partial S_n}{\partial \varphi_2}=R_n(J)-V_n(J, \varphi). \tag{22}$$

Пусть

$$S_n=\sum_\tau S_n^\tau(J) e^{i(\tau, \varphi)}, \quad V_n=\sum_\tau V_n^\tau(J)\, e^{i(\tau, \varphi)}.$$

Тогда из (22) получим серию равенств (ср. их с (7)):

$$S_n^\tau=\frac{iV_n^\tau}{(\tau, \nu)}, \qquad \tau \neq 0.$$

Нетрудно понять, что в переменных I, φ вековое множество $\mathbf{B}_n$ можно отождествить с множеством точек I, удовлетворяющих условиям: $(\tau, \nu(I))=0$, $V_n^\tau(I)\neq 0$. Запишем формальный ряд для интеграла Φ в переменных I, φ:

$$W_0(I)+\varepsilon W_1(I, \varphi)+\ldots+\varepsilon^n W_n(I, \varphi)+\ldots$$

Из вида разложения (21) и невырожденности функции $V_0(I)$ следует, что функции W_s, $s<n$, не зависят от φ. Приравнивая нулю коэффициент при ε^n в разложении скобки Пуассона $\{V, W\}$, получаем уравнение

$$\{V_0, W_n\}=\{W_0, V_n\}. \tag{23}$$

Положим $W_n=\sum\limits_\tau W_n^\tau(I)\, e^{i(\tau, \varphi)}$. Тогда уравнение (23) окажется эквивалентным серии равенств $\left(\frac{\partial V_0}{\partial I}, \tau\right) W_n^\tau=\left(\frac{\partial W_0}{\partial I}, \tau\right) V_n^\tau$.

Если $I\in\mathbf{B}_n$, то $(\nu, \tau)=0$, а $V_n^\tau\neq 0$. Следовательно, $(\partial W_0/\partial I, \tau)=0$. Отсюда в свою очередь вытекает зависимость функций V_0 и W_0, что и требовалось доказать.

Так как функции F_0 и Φ_0 аналитичны, зависимы на вековом множестве и вековое множество состоит из бесконечного числа прямых (основная лемма), то F_0 и Φ_0 зависимы всюду в области Δ_H. Применив известное рассуждение Пуанкаре (см. [2], п. 81) в окрестности точки

$(L_0, G_0) \in \Delta_H$ из условия теоремы 1, можно доказать существование такого формального интеграла $\Psi_0 + \varepsilon\Psi_1 + \dots$, что F_0 и Ψ_0 не являются тождественно зависимыми функциями. Полученное противоречие доказывает теорему 1.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть $(0, y, z)$ — проекции центра масс на оси инерции тела. Единицы измерения длины и массы можно подобрать таким образом, чтобы $A=1$, $C=\delta$, $\varepsilon y=\delta$. В дальнейшем δ считаем малым параметром. Для определенности рассмотрим случай, когда $z=0$, $H \neq 0$ (случай $z \neq 0$ рассматривается аналогично). С учетом этих предположений, уравнения Эйлера—Пуассона, записанные в традиционных обозначениях, имеют следующий вид:

$$\dot{p} = (1-\delta) qr - \delta\gamma_3, \quad \dot{q} = (\delta-1) pr, \quad \dot{r} = \gamma_1, \tag{24}$$

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \qquad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \qquad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \tag{25}$$

Эти уравнения имеют первые интегралы

$$p^2+q^2+\delta r^2+2\delta\gamma_2=2h, \qquad p\gamma_1+q\gamma_2+\delta r\gamma_3=c \quad (c=H\neq 0), \qquad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1.$$

Если найдется дополнительный интеграл уравнений (24), (25), то рассматриваемая гамильтонова система будет вполне интегрируемой.

Система уравнений (24) при $\delta=0$ имеет вид

$$\dot{p} = qr, \quad \dot{q} = -pr, \quad \dot{r} = \gamma_1. \tag{26}$$

Уравнения (25), (26) являются уравнениями движения «ограниченной» задачи о вращении твердого тела с неподвижной точкой.

Смысл ограниченной постановки задачи заключается в следующем. При $\delta \to 0$ твердое тело вырождается в прямолинейный отрезок, который вращается вокруг неподвижной точки по закону сферического маятника. Если $z=0$, то сила тяжести не оказывает действия на отрезок, что приводит к равномерному движению маятника по большим кругам неподвижной сферы. Хорошо известная картина движения сферического маятника дает ясное представление о нутации и прецессии твердого тела. На первый взгляд может показаться, что при $\delta=0$ теряет смысл задача о собственном вращении твердого тела. Однако это не так: при $\delta \to 0$ одновременно стремятся к нулю момент инерции и момент силы тяжести относительно оси динамической симметрии. В пределе получается уравнение для собственного вращения, изучение которого представляет самостоятельный интерес. Переход к ограниченной задаче в динамике твердого тела вполне аналогичен переходу к ограниченной задаче трех тел в небесной механике.

Система уравнений (25)—(26) обладает тремя независимыми интегралами

$$p^2+q^2=2h, \qquad p\gamma_1+p\gamma_2=c, \qquad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1. \tag{27}$$

При $2h > c^2$ соотношения (27) высекают в шестимерном фазовом пространстве системы (25)—(26) трехмерное интегральное многообразие $M_{h,c}$. Положим

$$p=\sqrt{2h}\cdot\sin\xi, \quad q=\sqrt{2h}\cdot\cos\xi. \tag{28}$$

Переменные ξ, $\dot{\xi}=r$, γ_3 являются координатами на $M_{h,c}$. Использовав уравнения (26)—(28), можно показать, что

$$\gamma_3 = \sqrt{1-\frac{c^2}{2h}} \cos\sqrt{2h}\cdot(t+\alpha), \qquad \alpha = \mathrm{const}, \tag{29}$$

а переменная ξ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\xi}=\frac{c}{\sqrt{2h}}\sin\xi-\sqrt{1-\frac{c^2}{2h}}\sin\sqrt{2h}\cdot(t+\alpha)\cos\xi. \tag{30}$$

С помощью соотношений (27)—(29) можно найти γ_1 и γ_2:

$$\begin{gathered}\gamma_1=\frac{c}{\sqrt{2h}}\sin\xi+\sqrt{1-\frac{c^2}{2h}}\cos\xi\sin\sqrt{2h}\cdot(t+\alpha),\\ \gamma_2=\frac{c}{\sqrt{2h}}\cos\xi-\sqrt{1-\frac{c^2}{2h}}\sin\xi\sin\sqrt{2h}\cdot(t+\alpha).\end{gathered} \tag{31}$$

Предположим теперь, что система уравнений (25)—(26) имеет дополнительный аналитический интеграл $\Phi(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Заменив переменные Эйлера—Пуассона с помощью соотношений (28), (29), (31), получим нетривиальный аналитический интеграл $\Phi(\dot{\xi}, \xi, t)$ уравнения (30), 2π-периодический по ξ и $2\pi/\sqrt{2h}$-периодический по t. Покажем, *что на самом деле уравнение (30) неинтегрируемо, если c^2 близко к $2h$.* Для этого представим уравнение (30) в гамильтоновой форме:

$$\dot{\xi}=H'_\eta,\quad \dot{\eta}=-H'_\xi;$$

$$H=\frac{\eta^2}{2}+\frac{c}{\sqrt{2h}}\cos\xi+\sqrt{1-\frac{c^2}{2h}}\sin\sqrt{2h}\cdot(t+\alpha)\sin\xi. \tag{32}$$

Положим $\sqrt{1-c^2/2h}=\nu$ и будем считать ν малым параметром. Отметим, что уравнение (30) имеет смысл и при $\nu=0$, когда происходит вырождение многообразия $M_{h,c}$. Гамильтониан (32) можно представить в следующем виде:

$$H=H_0+\nu H_1+o(\nu), \tag{33}$$

$$H_0=\frac{\eta^2}{2}+\cos\xi,\quad H_1=\sin\xi\sin\sqrt{2h}\cdot(t+\alpha).$$

При $\nu=0$ будем иметь невозмущенную систему — математический маятник. Она имеет двояко-асимптотические решения:

$$\sin\xi(t)/2=\frac{1}{\operatorname{ch}(t-t_0)},\quad \eta(t)=\frac{2}{\operatorname{ch}(t-t_0)};\ t_0=\text{const}. \tag{34}$$

Кривая на плоскости переменных ξ, η, заданная параметрически уравнениями (34), является сепаратрисой для периодического решения $\xi=\eta=0$. В невозмущенной задаче устойчивая и неустойчивая сепаратрисы сдвоены. В возмущенной задаче это уже не так. Покажем, что при малых фиксированных значениях $\nu\neq0$ устойчивая и неустойчивая сепаратрисы пересекаются, что приводит в свою очередь к неинтегрируемости уравнений (32) (подробности см. в [3], гл. V). Для этого надо убедиться в том, что несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{H_0,\ H_1\}\,dt, \tag{35}$$

вычисленный вдоль аналитических решений (34), не является тождественным нулем, как функция t_0 (см. [3]). Интеграл (35) вычисляется с помощью вычетов и при $t_0=-\alpha+\pi/2\sqrt{2h}$ равен $-\dfrac{4\pi h}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi\sqrt{2h}}{2}}$, что отлично от нуля при $h\neq 0$. Поскольку поведение расщепленных сепаратрис устойчиво по отношению к малым изменениям параметров, уравнения (24), (25) при малых значениях параметра δ также не имеют дополнительного аналитического интеграла. Теорема доказана.

5. Приложения к задаче о движении твердого тела в идеальной жидкости. Развитые выше методы доказательства неинтегрируемости можно применить также к классической задаче о движении по инерции твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости, рассматриваемой в предположении, что тело имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии. Движение такого тела описывается следующими уравнениями Кирхгофа:

$$I\dot{\omega}=I\omega\times\omega+\gamma\times J\gamma,\qquad \dot{\gamma}=\gamma\times\omega. \tag{36}$$

Здесь $\omega=(p,\ q,\ r)$ — угловая скорость вращения тела, $\gamma=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)$ — «импульсивная сила», $I=\operatorname{diad}(A,\ B,\ C)$, $J=\operatorname{diad}(L,\ M,\ N)$ — постоянные матрицы (подробности см. в книге [4]). Отметим, что уравнения (36) описывают также вращение твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном силовом поле с квадратичным потенциалом (аналогия В. А. Стеклова [4]). Уравнения Кирхгофа всегда имеют три первых интеграла:

$$2F=(I\omega,\omega)+(J\gamma,\gamma),\quad H=(I\omega,\gamma),\quad \Gamma=(\gamma,\gamma). \tag{37}$$

Для их полной интегрируемости недостает четвертого интеграла, независимого от классических. Хорошо известен случай интегрируемости Клебша: если

$$A(M-N)+B(N-L)+C(L-M)=0, \tag{38}$$

то уравнения (36) имеют четвертый интеграл

$$(I\omega,I\omega)-(I^{-1}\gamma,JI^{-1}\gamma)\det I.$$

Условие (38) заведомо выполнено, если $A=B=C$. В работе [5] показано, что при $A\neq B\neq C$ условие Клебша (38) является критерием существования дополнительного интеграла уравнений (36), аналитического в $\mathbf{R}^6=\mathbf{R}^3\{\omega\}\times\mathbf{R}^3\{\gamma\}$. Если $A=B\neq C$, то условие (38) эквивалентно условию $L=M$.

Теорема 3. *Если $L\neq M$, $A=B>2C$ и отношение A/C трансцендентно, то уравнения Кирхгофа не имеют дополнительного интеграла, аналитического во всем $\mathbf{R}^6=\{\omega,\gamma\}$.*

Теорема 3 доказывается методом теории возмущений. Для этого введем в уравнения (36) малый параметр ε, заменив γ на $\varepsilon\gamma$. С помощью такой замены общая задача о движении тела в жидкости превращается в возмущение интегрируемой задачи Эйлера—Пуансо. Использовав аналогию В. А. Стеклова, уравнения движения можно представить в виде уравнений Гамильтона с двумя степенями свободы с гамильтонианом $F_0+\varepsilon^2F_1$. В специальных канонических переменных функция F_0 не зависит от углов l и g (см. п. 1), а функция F_1 является тригонометрическим многочленом от l и g. Если имеется дополнительный независимый аналитический интеграл уравнений Кирхгофа, то имеется и интеграл уравнений Гамильтона в виде ряда по степеням ε. Применив рассуждения из пунктов 2, 3, можно показать, что в этом случае отношение A/C должно быть алгебраическим числом.

З а м е ч а н и е. Условие трансцендентности отношения A/C в теореме 3 можно заменить более слабым условием: A/C не является корнем многочленов $\Sigma a_s x^s$ с целыми коэффициентами и свободным членом $a_0 = 2^m$, $m \in \mathbf{N}$ (ср. с теоремой 1 из п. 1). В частности, если $A/C \in \mathbf{N}$, то $A = 2^k C$. Значению $k = 0$ соответствует интегрируемый случай полной симметрии, а значению $k = 1$ — частный случай интегрируемости Чаплыгина, когда $H = 0$ (см. [6]).

Зафиксировав значения параметров $A = B$ и N, заменим параметры C, L, M на δC, δL, δM, где $0 < \delta \leqslant 1$. Заметим, что при малых значениях δ левая часть равенства (38) будет равна $A(L-M)\delta + o(\delta)$.

Т е о р е м а 4. *Если $L \neq M$, то при малых значениях $\delta > 0$ уравнения Кирхгофа не имеют интеграла, независимого от классических и аналитического в* $\mathbb{R}^6 = \{\omega, \gamma\}$.

Это утверждение доказывается методом пункта 4. В уравнениях (36) положим $\delta = 0$, разделив предварительно на δ обе части уравнения для изменения переменной r. В результате получим ограниченную задачу о движении твердого тела в жидкости. Сначала установим ее неинтегрируемость. Первые интегралы (37) перейдут при $\delta = 0$ в интегралы ограниченной задачи:

$$p^2 + q^2 + \alpha\gamma_3^2 = h, \quad p\gamma_1 + q\gamma_2 = c, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \gamma^2.$$

Здесь $\alpha = N/A$, h, c, $\gamma = \mathrm{const}$. С помощью уравнений движения нетрудно установить уравнения для изменения удвоенного угла «собственного вращения» $\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\,\gamma_1/\gamma_2$:

$$\ddot{\varphi} + \Lambda(\gamma^2 - u^2)\sin\varphi = 2\left(\frac{cu}{\gamma^2 - u^2}\right)^{\cdot}, \qquad \Lambda = \frac{L-M}{C};$$

$$u^2 = (h - \alpha u^2)(\gamma^2 - u^2) - c^2. \tag{39}$$

Положим $h\gamma^2 = c^2 + \nu^2$. Тогда

$$u(t) = \nu u_0(t) + o(\nu), \quad \text{где} \quad u_0(t) = -\lambda\cos\sqrt{h - \alpha\gamma^2}\cdot(t - t_0), \qquad \lambda, t_0 = \mathrm{const}.$$

При малых значениях ν уравнение (39) можно представить в следующем виде:

$$\ddot{\varphi} + \Lambda\gamma^2\sin\varphi = \frac{2\nu c\lambda}{\gamma^2\sqrt{h - \alpha\gamma^2}}\sin\sqrt{h - \alpha\gamma^2}\cdot(t - t_0) + o(\nu). \tag{40}$$

Методом расщепления сепаратрис ([3], гл. V) доказывается отсутствие аналитического интеграла уравнения (40), периодического по φ и t (сам факт расщепления сепаратрис для уравнения (40) установлен в работе [7]). Поскольку свойство расщепления сепаратрис устойчиво по отношению к малым возмущениям, отсюда вытекает неинтегрируемость уравнений (36) при малых значениях $\delta > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К о з л о в В. А., Т р е щ е в Д. В. Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. I. — Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1985, № 6, 73—81.
2. П у а н к а р е А. Новые методы небесной механики. — В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1. М., 1971.
3. К о з л о в В. В. Успехи матем. наук, 1983, **38**, вып. 1, 3—67.
4. С т е к л о в В. А. О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893.
5. К о з л о в В. В., О н и щ е н к о Д. А. — Докл. АН СССР, 1982, **266**, № 6, 1298—1300.
6. Ч а п л ы г и н С. А. Новое решение задачи о движении твердого тела в жидкости. — В кн.: Чаплыгин С. А. Полн. собр. соч., т. 1. Л., 1933, с. 151—158.
7. М о р о з о в А. Д., Ш и л ь н и к о в Л. П. — Докл. АН СССР, 1975, **223**, № 6.

Поступила в редакцию 26.12.84