# 14

# К ТЕОРИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКИ[1]

***В. В. Козлов***

## 1. Введение

Теория интегрирования уравнений движения механических систем с неголономными связями разработана не столь полно, как в случае голономных связей. Это обстоятельство имеет несколько причин. Во-первых, уравнения неголономной механики имеют более сложную структуру, чем уравнения Лагранжа, описывающие динамику систем с интегрируемыми связями. В частности, неголономную систему нельзя охарактеризовать одной единственной функцией от ее состояния и времени (ср. с [1], гл. XXIV). Во-вторых, уравнения неголономной механики в общем случае не имеют инвариантной меры (простой пример указан в разд. 5). Дело в том, что неголономные связи можно реализовать с помощью действия дополнительных сил вязкого анизотропного трения с большим коэффициентом вязкости [3]. Отсутствие инвариантной меры — характерное свойство систем с трением. Анизотропное трение в пределе совместимо с сохранением полной энергии. Однако на многообразиях уровней энергии могут возникать асимптотически устойчивые положения равновесия или предельные циклы (ср. [4]), что препятствует существованию дополнительных «регулярных» интегралов движения.

Наиболее распространенный способ интегрирования уравнений неголономной динамики основан на использовании имеющихся первых интегралов — «законов сохранения»: если группа Ли, действующая на

[1]Успехи механики, т. 8, №3, 1985, с. 85–107.

пространстве положений, сохраняет лагранжиан и порождающие ее векторы поля являются полями возможных скоростей, то уравнения движения имеют первый «векторный» интеграл — обобщенный интеграл кинетического момента [5],[6]. Этим способом решен ряд задач неголономной динамики, среди которых особо выделим задачу С. А. Чаплыгина о качении несимметричного шара по горизонтальной плоскости [5].

Попытки распространения метода Гамильтона – Якоби на системы с неголономными связями оказались неэффективными, как и попытки представить уравнения неголономной динамики в форме канонических уравнений Гамильтона. Оказалось, что с помощью обобщенного метода Гамильтона – Якоби можно найти в лучшем случае лишь частные решения уравнений движения. Эта работа содержит обстоятельный анализ этих вопросов.

Еще один общий подход к интегрированию неголономных уравнений основан на теории приводящего множителя С. А. Чаплыгина [5]: ищется замена времени (разная вдоль разных траекторий), с помощью которой уравнения движения приводятся к уравнениям Лагранжа или Гамильтона. Хотя такая замена может существовать лишь в исключительных случаях, с ее помощью решен ряд новых задач неголономной динамики (см. [5]). Отметим, что к гамильтонову виду уравнения движения иногда можно свести с помощью иных соображений (см. разд. 5).

Список точно решенных задач неголономной механики невелик: практически полная информация содержится в книгах [1],[5],[8]. В настоящей работе указаны некоторые новые интегрируемые задачи, рассмотрены особенности поведения траекторий неголономных систем в фазовом пространстве, а также предложены некоторые общие теоретические соображения, касающиеся методов интегрирования уравнений неголономной динамики.

## 2. Дифференциальные уравнения с инвариантной мерой

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

и пусть $g^t$ — его фазовый поток. Предположим, что уравнение (2.1) имеет интегральный инвариант с некоторой гладкой плотностью $M(x)$: т. е. для любой измеримой области $D \subset R^n$ и для всех $t$ выполнено равенство

$$\int\limits_{g^t(D)} M(x)\,dx = \int\limits_D M(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Вспомним хорошо известное утверждение Лиувилля: гладкая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является плотностью инварианта

$$\int M(x)\,dx$$

тогда и только тогда, когда $\operatorname{div}(Mf) \equiv 0$. Если $M(x) > 0$ для всех $x$, то формула (2.2) определяет меру в $\mathbb{R}^n$, инвариантную относительно действия $f$. Наличие инвариантной меры облегчает интегрирование дифференциального уравнения; например, при $n = 2$ оно всегда интегрируется в квадратурах. По Эйлеру $M$ называется еще интегрирующим множителем.

**Теорема 1.** *Предположим, что система уравнений* (2.1) *с инвариантной мерой* (2.2) *имеет* $n-2$ *первых интеграла* $F_1, \ldots, F_{n-2}$. *Пусть на инвариантном множестве* $E_c = \{x \in \mathbb{R}^n\colon F_s(x) = c_s,\ 1 \leqslant s \leqslant n-2\}$ *функции* $F_1, \ldots, F_{n-2}$ *независимы. Тогда*

1) *решения уравнения* (2.1), *лежащие на* $E_c$, *находятся квадратурами. Если* $L_c$ — *связная компактная компонента множества уровня* $E_c$ *и* $f \neq 0$ *на* $L_c$, *то*

2) $L_c$ — *гладкая поверхность, диффеоморфная двумерному тору,*

3) *на* $L_c$ *можно подобрать угловые координаты* $x, y \mod 2\pi$ *так, чтобы в этих переменных уравнение* (2.1) *на* $L_c$ *приняло следующий вид:*

$$\dot{x} = \frac{\lambda}{\Phi(x,\, y)}, \quad \dot{y} = \frac{\mu}{\Phi(x,\, y)}, \tag{2.3}$$

*где* $\lambda, \mu = \mathrm{const}$, $|\lambda| + |\mu| \neq 0$, *а* $\Phi$ — *гладкая положительная функция,* $2\pi$*-периодическая по* $x$ *и* $y$.

Укажем основные моменты доказательства. Поскольку векторное поле $f$ касается $\mathrm{E}_c$, то дифференциальное уравнение (2.1) можно ограничить на $\mathrm{E}_c$. Это уравнение на $\mathrm{E}_c$ будет иметь интегральный инвариант

$$\int \frac{M\,d\sigma}{V_{n-2}},$$

где $d\sigma$ — элемент площади $\mathrm{E}_c$ как поверхности, вложенный в $\mathbb{R}^n$, $V_{n-2}$ — $(n-2)$-мерный объем параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$, построенного на градиентах функций $F_1, \ldots, F_{n-2}$ как на сторонах. Интегрируемость в квадратурах на $E_c$ выкает теперь из замечания Эйлера. Заключение 1 теоремы 1 (отмеченное впервые Якоби) тем самым доказано. Заключение 2 составляет известный топологический факт, что всякое связанное, компактное, ориентируемое двумерное многообразие, допускающее касательное поле без особых точек, диффеоморфно двумерному тору. Заключение 3 фактически является теоремой А. Н. Колмогорова о приведении дифференциальных уравнений на торе с гладкой инвариантной мерой [9].

Уравнения (2.3) имеют инвариантную меру

$$\iint \bigl|\Phi(x,\, y)\bigr|\, dx \wedge dy.$$

Усредняя правые части системы (2.3) по этой мере, получим дифференциальные уравнения

$$\dot u = \frac{\lambda}{\nu}, \quad \dot v = \frac{\mu}{\nu}; \quad \nu = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi\, dx\, dy. \tag{2.4}$$

**Предложение 1.** *Если* $\Phi\colon T^2 \to \mathbb{R}$ — *гладкая* (*аналитическая*) *функция, то для почти всех пар* $(\lambda,\, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *существует гладкая* (*аналитическая*) *замена угловых переменных* $x,\, y \to u,\, v$, *приводящая систему* (2.3) *к системе* (2.4).

Доказательство можно найти в [9],[10]. Отметим, что если система (2.3) не приводится к системе (2.4) для пары $(\lambda,\, \mu)$, тогда то же самое имеет место и для всех пар $(\varkappa\lambda,\, \varkappa\mu)$, $\varkappa \neq 0$. Таким образом, свойство приводимости зависит от арифметических свойств отношения $\frac{\lambda}{\mu}$, которое называется числом вращения касательного векторного поля на $T^2 = \bigl\{x,\, y \mod 2\pi\bigr\}$.

**Предложение 2.** *Пусть* $\Phi(x,\, y) = \sum \varphi_{m,n} \exp i(mx + ny)$, $\varphi_{m,n} = \overline{\varphi}_{-m,-n}$. *Если дифференцируемой заменой угловых переменных* $u = u(x,\, y)$, $v = v(x,\, y)$ *систему* (2.3) *можно привести к виду* (2.4), *то*

$$\sum_{|m|+|n|\neq 0} \left|\frac{\varphi_{m,n}}{m\lambda + n\mu}\right|^2 < \infty. \tag{2.5}$$

При рациональном отношении $\frac{\lambda}{\mu}$ тор $T^2$ расслоен на семейство замкнутых траекторий. В этом случае условие приводимости эквивалентно равенству периодов обращения по различным замкнутым траекториям.

В общем случае (когда разложение Фурье функции Φ содержит гармоники) точки $(\lambda,\, \mu) \in \mathbb{R}^2$ с рационально независимыми $(\lambda,\, \mu)$, для которых ряд (2.5) расходится, всюду плотны в $\mathbb{R}^2$. Обсуждение вопросов приводимости уравнений (2.3) можно найти в работе [9]. Относительно общих свойств решений системы (2.3) см. [10].

## 3. Задача С. А. Чаплыгина

В качестве примера рассмотрим задачу о качении уравновешенного, динамически несимметричного, шара по горизонтальной шероховатой плоскости (см. [5]). Движение шара описывается следующей системой уравнений в $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3\{\omega\} \times \mathbb{R}^3\{\gamma\}$:

$$\begin{gathered} \dot{k} + \omega \times k = 0, \quad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0; \\ k = I\omega + ma^2\gamma \times (\omega \times \gamma). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Пусть $\omega$ — вектор угловой скорости вращения шара, $\gamma$ — единичный вектор вертикали, $I$ — тензор инерции шара относительно его центра, $m$ — масса шара, а $a$ — его радиус. Эти уравнения имеют инвариантную меру с плотностью

$$M = \frac{1}{\sqrt{(ma^2)^{-1} - \langle \gamma, (I + ma^2\mathrm{E})^{-1}\gamma \rangle}}, \quad \mathrm{E} = \|\delta_{ij}\|. \tag{3.2}$$

Учитывая наличие четырех независимых интегралов $F_1 = \langle k, \omega \rangle$, $F_2 = \langle k, \gamma \rangle$, $F_3 = \langle \gamma, \gamma \rangle$, $F_4 = \langle k, k \rangle$, мы видим, что уравнения (3.1) интегрируются в квадратурах. Отметим, что система уравнений (3.1) не имеет положений равновесия на некритических множествах уровня $\mathrm{E}_c$. Действительно, если $\dot{\gamma} = 0$, то векторы $\omega$ и $\gamma$ линейно зависимы. Это, в свою очередь, влечет линейную зависимость дифференциалов $dF_1$ и $dF_2$. Наиболее просто уравнения (3.1) интегрируются в случае, когда постоянная интеграла «площадей» $F_2$ равна нулю. В эллиптических координатах $\xi$, $\eta$ на сфере Пуассона $\langle \gamma, \gamma \rangle = 1$ уравнения движения на уровне $\mathrm{E}_c$ можно свести к следующему виду:

$$\begin{gathered} \dot{\xi} = \frac{\sqrt{P_5(\xi)}}{\xi(\xi^{-1} - \eta^{-1})\,\Phi(\xi, \eta)}; \quad \dot{\eta} = \frac{\sqrt{P_5(\eta)}}{\eta(\xi^{-1} - \eta^{-1})\,\Phi(\xi, \eta)}; \\ \Phi = \sqrt{(a - \xi)(a - \eta)}. \end{gathered}$$

Коэффициенты многочлена 5-й степени $P_5$ и постоянная $a$ зависят от параметров задачи и констант первых интегралов (детали можно найти в [5]). Переменные $\xi$, $\eta$ изменяются в различных замкнутых интервалах $a_1 \leqslant \xi \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant \eta \leqslant b_2$, где полином $P_5$ принимает неотрицательные значения. Униформизирующая замена переменных

$$\begin{aligned} x &= \lambda \int\limits_{a_1}^{\xi} \frac{z\,dz}{\sqrt{P_5(z)}}, \qquad \lambda^{-1} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{z\,dz}{\sqrt{P_5(z)}}, \\ y &= \mu \int\limits_{b_1}^{\eta} \frac{z\,dz}{\sqrt{P_5(z)}}, \qquad \mu^{-1} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{z\,dz}{\sqrt{P_5(z)}}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

вводит угловые координаты $x, y \mod 2\pi$ на $\mathrm{E}_c$, в которых уравнения движения (2.3) приобретают вид

$$\begin{gathered} \dot{x} = \frac{\lambda}{\Phi(x,\, y)}, \quad \dot{y} = \frac{\mu}{\Phi(x,\, y)}, \\ \Phi = \bigl(\xi^{-1}(x) - \eta^{-1}(y)\bigr)\sqrt{\bigl(a - \xi(x)\bigr)\bigl(a - \eta(y)\bigr)}. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь $\xi(x)$ и $\eta(y)$ — $2\pi$-периодические функции от $x$ и $y$, получающиеся из обращения абелевых интегралов (3.3).

Из этих уравнений вытекает

**Предложение 3.** *Число вращения касательного векторного поля на двумерных инвариантных торах задачи Чаплыгина равно отношению вещественных периодов абелева интеграла*

$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{P_5(z)}}.$$

Замечание. Это утверждение справедливо и для интегрируемых задач динамики тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, описываемой системой уравнений Эйлера – Пуассона (см. [10]). Поскольку уравнения Эйлера – Пуассона имеют гамильтонову природу, то по теореме Лиувилля в интегрируемых случаях на двумерных инвариантных торах они все приводятся к виду (2.4). По-видимому, уравнения (3.4) этим свойством не обладают: неравенство (2.5) имеет место не на всех инвариантных нерезонансных торах.

Сделаем замену времени $t \to \tau$ по формуле

$$dt = \sqrt{(a - \xi)(a - \eta)}\, d\tau. \tag{3.5}$$

Уравнения (3.4) сохраняют свой вид, только у функции $\Phi$ переменные $x$, $y$ разделяются:

$$\Phi = \xi^{-1}(x) - \eta^{-1}(y).$$

**Предложение 4.** *Предположим, что в системе уравнений* (2.3) *числа $\lambda$ и $\mu$ отличны от нуля и*

$$\Phi = \Phi'(x) + \Phi''(y).$$

*Тогда обратимой заменой угловых координат на $T^2$ уравнения* (2.3) *приводятся к виду* (2.4).

Доказательство можно найти в [10]. Отметим, что если $\Phi = \Phi'(x) + \Phi''(y)$, то ряд (2.5)

$$\sum_{n\neq 0} \left|\frac{\varphi'_n}{n\lambda}\right|^2 + \left|\frac{\varphi''_n}{n\mu}\right|^2$$

сходится при всех $\lambda$, $\mu \neq 0$.

Итак, с учетом замены времени (3.5) уравнения (3.4) можно привести к виду

$$\frac{du}{d\tau} = U, \quad \frac{dv}{d\tau} = V, \tag{3.6}$$

где $U$ и $V$ зависят лишь от постоянных первых интегралов, причем $U, V \neq 0$. В связи с этим результатом возникает соблазн воспользоваться теоремой приводящего множителя С. А. Чаплыгина: если с помощью замены времени (3.5) уравнения (3.1) приводятся к уравнениям Эйлера – Лагранжа некоторой вариационной задачи (записанным, как и классические уравнения Эйлера – Пуассона, в избыточных координатах), то по теореме Лиувилля уравнения движения на двумерных инвариантных торах в некоторых угловых переменных $u, v \mod 2\pi$ имеют как раз вид (3.6). Можно показать, однако, что этот подход не приводит к цели. Отметим в заключение, что сам С. А. Чаплыгин не связывал задачу о качении шара с теорией приводящего множителя.

## 4. Обобщение задачи С. А. Чаплыгина

Укажем, что задача о качении уравновешенного, динамически несимметричного шара по шероховатой плоскости останется интегрируемой (в смысле разд. 1), если частицы шара будут притягиваться этой плоскостью пропорционально расстоянию. Поскольку центр масс шара совпадает с его геометрическим центром, то потенциал можно вычислить по формуле

$$V(\gamma) = \frac{\varepsilon}{2}\int \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma}\rangle^2\, dm = \frac{\varepsilon}{2}\langle \mathbf{I}\gamma, \gamma\rangle, \tag{4.1}$$

где $\gamma$ — единичный вектор вертикали, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор частиц шара, $\mathbf{I}$ — тензор инерции шара относительно его центра. Силы притяжения создают вращательный момент

$$-\int \boldsymbol{r} \times \big(\varepsilon\langle \boldsymbol{r}, \gamma\rangle\gamma\big)\, dm = -\varepsilon\int \langle \boldsymbol{r}, \gamma\rangle(\boldsymbol{r}\times\gamma)\, dm = \gamma \times V'{}_{\gamma} = \varepsilon\gamma\times\mathbf{I}\gamma.$$

Для того чтобы получить момент сил относительно точки касания, надо добавить момент суммарной силы

$$\varepsilon\int \langle \boldsymbol{r}, \gamma\rangle\gamma\, dm = \varepsilon\Big\langle \int \boldsymbol{r}\, dm, \gamma\Big\rangle\gamma,$$

равный нулю из-за совпадения центра масс шара с его геометрическим центром.

С помощью теоремы об изменении кинетического момента относительно точки контакта (см. [5],[6]) уравнения качения шара можно представить в следующем виде:

$$\dot{k} + \omega\times k = \varepsilon\gamma\times\mathbf{I}\gamma, \quad \dot{\gamma} + \omega\times\gamma = 0. \tag{4.2}$$

**Теорема 2.** *Дифференциальные уравнения* (4.2) *интегрируемы в квадратурах.*

Действительно, они имеют четыре независимых интеграла

$$F_1 = \langle k, \omega\rangle + \varepsilon\langle \mathbf{I}\gamma, \gamma\rangle, \quad F_2 = \langle k, \gamma\rangle, \quad F_3 = \langle\gamma, \gamma\rangle = 1,$$
$$F_4 = \langle k, k\rangle - \langle A\gamma, \gamma\rangle,$$

где элементы $A_i$ диагональной матрицы $A$ выражаются через главные моменты инерции $I_i$ с помощью формул

$$A_1 = \varepsilon(I_2 + ma^2)(I_3 + ma^2), \ldots$$

Поскольку уравнения (4.2) имеют инвариантную меру с плотностью (3.2), то, по теореме 1, они интегрируемы. Было бы интересно осуществить это интегрирование явно и проверить, справедливо ли для уравнений (4.2) предложение 3.

Отметим, что задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в осесимметричном силовом поле с потенциалом (4.1) тоже интегрируема [1]. Кроме тех классических интегралов $F_1$, $F_2$, $F_3$ она обладает интегралом $F_4$, в котором надо положить $\boldsymbol{a} = 0$. Этот интеграл найден независимо Клебшем в задаче о движении твердого тела в идеальной жидкости и Тиссераном при исследовании вращательного движения небесных тел.

## 5. Задача Г. К. Суслова и ее обобщения

Следуя Г. К. Суслову ([11], гл. 53), рассмотрим задачу о вращении вокруг неподвижной точки твердого тела с неинтегрируемой связью $\langle \boldsymbol{a}, \omega\rangle = 0$, где $\boldsymbol{a}$ — вектор, постоянный в подвижном пространстве. Пусть тело вращается в осесимметрическом силовом поле с потенциалом $V(\gamma)$. Следуя методу множителей Лагранжа, запишем уравнения движения ([11], гл. 46)

$$\mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I}\omega = \gamma \times V'_{\gamma} + \lambda \boldsymbol{a}, \quad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0, \quad \langle \boldsymbol{a}, \omega\rangle = 0. \tag{5.1}$$

Используя уравнение связи $\langle \boldsymbol{a}, \omega\rangle = 0$, множитель Лагранжа можно найти как функцию от $\omega$ и $\gamma$

$$\lambda = -\big\langle \boldsymbol{a}, I^{-1}(\mathbf{I}\omega \times \omega) + I^{-1}(\gamma \times V''_{\gamma})\big\rangle \big/ \langle \boldsymbol{a}, I^{-1}\boldsymbol{a}\rangle.$$

Уравнения (5.1) всегда имеют три независимых интеграла:

$$F_1 = \langle \mathbf{I}\omega, \omega\rangle/2 + V(\gamma), \quad F_2 = \langle \gamma, \gamma\rangle, \quad F_3 = \langle \boldsymbol{a}, \omega\rangle.$$

Для реальных движений $F_2 = 1$, $F_3 = 0$. Таким образом, задача интегрирования уравнений (5.1) сводится к нахождению инвариантной меры (ее существование вовсе не очевидно) и четвертого независимого интеграла.

**Предложение 5.** *Если вектор $\boldsymbol{a}$ является собственным вектором оператора $\mathbf{I}$, то фазовый поток системы* (5.1) *сохраняет «стандартную» меру в $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3\{\omega\} \times \mathbb{R}^3\{\gamma\}$.*

Доказательство состоит в непосредственной проверке следующего факта: дивергенция правой части системы (5.1) равна нулю, когда $\mathbf{I}\boldsymbol{a} = \mu\boldsymbol{a}$.

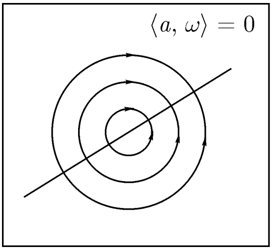


Рис. 1

Г. К. Суслов рассмотрел частный случай задачи, когда на твердое тело не действуют внешние силы: $V \equiv 0$. В этом случае первое уравнение системы (5.1) является замкнутым относительно $\omega$. Можно показать, что оно интегрируется в квадратурах (см. [11], гл. 53). Анализ этих квадратур показывает, что если вектор $\boldsymbol{a}$ не является собственным вектором оператора инерции, то все траектории $\omega(t)$ при $t \to \pm\infty$ асимптотически приближаются к некоторой прямой на плоскости $\langle \boldsymbol{a},\, \omega\rangle = 0$ (см. рис. 1). Следовательно, уравнение для $\omega$ и полная система не имеют инвариантной меры с непрерывной плотностью. В этом случае теорема 1 не применима и в связи с этим остается открытым вопрос о возможности отыскания вектора $\gamma(t)$ с помощью квадратур. Если же $\mathbf{I}\boldsymbol{a} = \mu\boldsymbol{a}$, то уравнения (5.1) имеют дополнительный интеграл

$$F_4 = \langle \mathbf{I}\omega,\, \mathbf{I}\omega\rangle\ :$$

сохраняется величина кинетического момента. По теореме 1 уравнения (5.1) интегрируемы. Впрочем, эту возможность легко реализовать непосредственно. По-видимому, и в самом общем случае наличие инвариантной меры связано с условием предложения 5: $\mathbf{I}\boldsymbol{a} = \mu\boldsymbol{a}$. Это условие в дальнейшем предполагается выполненным.

Предположим теперь, что тело вращается в однородном силовом поле: $V = \langle \boldsymbol{b},\, \gamma\rangle$. Если $\langle \boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}\rangle = 0$, то уравнения (5.1) допускают интеграл

$$F_4 = \langle \mathbf{I}\omega,\, \boldsymbol{b}\rangle$$

и, следовательно, интегрируются в квадратурах. Этот случай отмечен Е. И. Харламовой в работе [12]. Мы рассмотрим «противоположный» случай, когда $\boldsymbol{b} = \varepsilon\boldsymbol{a}$, $\varepsilon \neq 0$. Без ущерба общности можно считать, что вектор $\boldsymbol{a}$ имеет компоненты $(0,\, 0,\, 1)$. Два первых уравнения (5.1) с учетом уравнения $\omega_3 = 0$ будут иметь следующий вид:

$$I_1\dot\omega_1 = \varepsilon\gamma_2, \quad I_2\dot\omega_2 = -\varepsilon\gamma_1; \quad \omega = (\omega_1,\, \omega_2,\, \omega_3).$$

Откуда $I_1\ddot\omega_1 = \varepsilon\dot\gamma_2$, $I_2\ddot\omega_2 = -\varepsilon\dot\gamma_1$. С помощью уравнений Пуассона $\dot\gamma_1 = -\omega_2\gamma_3$, $\dot\gamma_3 = \omega_1\gamma_3$ получим, что

$$I_1\ddot\omega_1 = \varepsilon\gamma_3\omega_1, \quad I_2\ddot\omega_2 = \varepsilon\gamma_2\omega_2. \qquad (5.2)$$

Интеграл энергии

$$(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2)/2 + \varepsilon\gamma_3 = h$$

позволяет выразить $\gamma_3$ через $\omega_1$ и $\omega_2$. После этого уравнения (5.2) можно переписать в виде уравнений Лагранжа

$$I_i^2\ddot{\omega}_i = \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}_i} = \frac{\partial L}{\partial \omega_i} \quad (i = 1,\, 2),$$

$$L = T - V, \quad T = \frac{I_1^2\dot{\omega}_1^2 + I_2^2\dot{\omega}_2}{2}, \quad V = \frac{1}{2}\Big(h - \frac{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2}{2}\Big)^2.$$

Эти уравнения имеют интеграл энергии $T + V$, постоянная которого для реальных движений равна $\varepsilon^2/2$. Подчеркнем, что, в отличие от теории приводящего множителя, наше приведение уравнений (5.1) к уравнениям Лагранжа (или Гамильтона) не использует замену времени (ср. с [11]).

Замена $I_i\omega_i = k_i$, соответствующая переходу от угловой скорости к кинетическому моменту, сводит рассматриваемую задачу о вращении твердого тела к задаче о движении материальной точки в потенциальном силовом поле

$$\ddot{k}_i = -\frac{\partial V}{\partial k_i} \quad (i = 1,\, 2), \quad V = \frac{1}{2}\Big(h - \frac{k_1^2 I_1^{-1} + k_2^2 I_2^{-1}}{2}\Big)^2. \tag{5.3}$$

При $I_1 = I_2$ будем иметь движение точки в центральном поле. Ему отвечает известный интегрируемый «случай Лагранжа» обобщенной задачи Г. К. Суслова. Так же, как и в классической задаче Лагранжа о тяжелом симметричном волчке, в этом случае уравнения движения интегрируемы в эллиптических функциях времени. Если $I_1 \neq I_2$, то, по-видимому, уравнения не имеют дополнительного аналитического интеграла, независимого от интеграла энергии. В пользу этого предположения свидетельствует следующее наблюдение. Положим формально $I_1 = -I_2 = 1$. Тогда при $h = 0$ уравнения (5.3) будут фактически совпадать с уравнениями однородной двухкомпонентной модели Янга – Миллса, неинтегрируемость которых установлена в [14].

При фиксированном значении $h$ точка движется в области, определяемой неравенством $V \leqslant \varepsilon^2/2$. Эти области при разных значениях $h$ изображены на рис. 2. Особо выделены траектории либрационных движений, когда одна из компонент $k_1$ или $k_2$ обращается в нуль. Эти движения выражены через эллиптические функции времени.

Еще один случай интегрируемости уравнений (5.1) дает

**Теорема 3.** *Пусть* $\mathbf{I}\boldsymbol{a} = \mu\boldsymbol{a}$ *и потенциал* $V(\gamma)$ *задан формулой* (4.1). *Тогда уравнения* (5.1) *интегрируются в квадратурах.*

Доказательство. Покажем, что уравнения (5.1) имеют интеграл

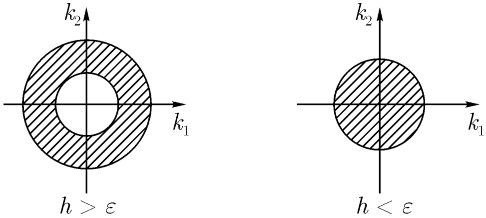


Рис. 2

Клебша-Тиссерана

$$F_4 = \frac{1}{2}\langle \mathbf{I}\omega,\, \mathbf{I}\omega\rangle - \frac{1}{2}\langle A\gamma,\, \gamma\rangle, \quad A = \varepsilon \mathbf{I}^{-1}\det \mathbf{I}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} F_4 = \langle \mathbf{I}\omega,\, \gamma\times\varepsilon\mathbf{I}\gamma\rangle + \lambda\langle \boldsymbol{a},\, \mathbf{I}\omega\rangle + \langle A\gamma,\, \omega\times\gamma\rangle = \\ = \big\langle \omega,\, \mathbf{I}(\gamma\times\varepsilon\mathbf{I}\gamma)\big\rangle + \lambda\mu\langle \boldsymbol{a},\, \omega\rangle + \langle \omega,\, \gamma\times A\gamma\rangle = \\ = \big\langle \omega,\, \mathbf{I}(\gamma\times\varepsilon\mathbf{I}\gamma) + \gamma\times A\gamma\big\rangle = 0, \end{aligned}$$

поскольку $\mathbf{I}(\gamma\times\mathbf{I}\gamma) = -(\gamma\times\mathbf{I}^{-1}\gamma)\det\mathbf{I}$. Для завершения доказательства осталось учесть заключение предложения 5 и воспользоваться теоремой 1. ■

Покажем, как можно проинтегрировать уравнения (5.1) в явном виде. Пусть, для определенности, $\boldsymbol{a} = (0,\, 0,\, 1)$ и $\varepsilon > 0$, $I_3 \geqslant I_1$, $I_3 \geqslant I_2$. Тогда уравнения (5.1) можно представить в виде следующей замкнутой системы из четырех дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} I_1\dot\omega_1 = \varepsilon(I_1 - I_2)\gamma_2\gamma_3, \quad I_2\dot\omega_2 = \varepsilon(I_3 - I_1)\gamma_1\gamma_3, \\ \dot\gamma_1 = -\omega_2\gamma_3, \quad \dot\gamma_2 = \omega_1\gamma_3, \quad \gamma_3^2 = 1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2. \end{gathered}$$

Введем новое время $\tau$ по формуле $d\tau = \gamma_3\, dt$ и обозначим штрихом дифференцирование по $\tau$. Тогда уравнения движения примут вид линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} I_1\omega_1' &= \varepsilon(I_2 - I_3)\gamma_2, \quad {\gamma'}_2 = \omega_1, \\ I_2\omega_2' &= \varepsilon(I_3 - I_1)\gamma_1, \quad {\gamma'}_1 = -\omega_2. \end{aligned}$$

Их можно представить в эквивалентной форме

$$\gamma_1'' + \lambda_1^2\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2'' + \lambda_2^2\gamma_2 = 0,$$
$$\lambda_1^2 = \varepsilon(I_3 - I_1)/I_2, \quad \lambda_2^2 = (I_3 - I_2)/I_1.$$

Положим

$$\varphi_1 = -\operatorname{arctg}\frac{\lambda_1\gamma_1}{\omega_2}, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{\lambda_2\gamma_2}{\omega_1}.$$

Эти переменные являются угловыми координатами на двумерных инвариантных торах, причем

$$\varphi_1' = \lambda_1, \quad \varphi_2' = \lambda_2.$$

Следовательно,

$$\dot\varphi_1 = \lambda_1/\Phi, \quad \dot\varphi_2 = \lambda_2/\Phi; \quad \Phi = (1 - c_1^2\sin^2\varphi_1 - c_2^2\sin^2\varphi_2)^{-1/2}.$$

Постоянные $c_1$ и $c_2$ ($c_1^2 + c_2^2 \leqslant 1$) можно выразить как функции от постоянных интегралов энергии и Клебша – Тиссерана. Удивительная особенность этой задачи заключается в том, что отношение частот $\lambda_1/\lambda_2$ не зависит от начальных данных, а зависит лишь от постоянных параметров задачи. Следовательно, если число

$$\sqrt{\frac{(I_3 - I_1)I_1}{(I_3 - I_2)I_2}}$$

рационально, то все решения периодичны; в противном случае практически все траектории незамкнуты (кроме вырожденных движений, когда $\gamma_1 \equiv 0$ или $\gamma_2 \equiv 0$). Пусть $\varphi_s(0) = a_s$. Тогда

$$t = \int\limits_0^\tau \frac{dx}{\sqrt{1 - c_1^2\sin^2(\lambda_1 x + a_1) - c_2^2\sin^2(\lambda_2 x + a_2)}}.$$

Если $c_1 = 0$ (или $c_2 = 0$), то $\gamma_1$ и $\gamma_2$ (следовательно, $\omega_1$, $\omega_2$ и $\gamma_3$ ) являются эллиптическими функциями времени. Этот же вывод справедлив и в случае $\lambda_1 = \lambda_2$ (т. е. когда $I_1 = I_2$ или $I_3 = I_1 + I_2$) при всех $c_1$, $c_2$. В самом общем случае аналитическая природа решений существенно сложнее. Отметим в заключение, что в этой задаче ряд (2.5) расходится, если иррациональное отношение $\lambda_1/\lambda_2$ аномально быстро приближается рациональными числами.

Замечание. Уравнения (5.1) интегрируемы и для потенциалов более общего вида

$$V(\gamma) = \frac{1}{2}(c_{11}\gamma_1^2 + c_{22}\gamma_2^2 + c_{33}\gamma_3^2 + 2c_{12}\gamma_1\gamma_2).$$

Заменой времени $d\tau = \gamma_3\, dt$ уравнения движения приводятся к линейной системе

$$I_2\gamma''_1 = -\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\gamma_1}, \quad I_1\gamma''_2 = -\frac{\partial V}{\partial\gamma_2}; \quad \widetilde{V} = V\big|_{\gamma_3^2=1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}.$$

В общем случае потенциалу $V$ трудно дать простую физическую интерпретацию.

## 6. Использование первых интегралов в качестве связей

Пусть $L(\dot{x}, x, t)$ — лагранжиан неголономной системы, удовлетворяющий следующему условию «регулярности»: квадратичная форма

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}}\,\xi, \xi \right\rangle$$

положительно определена. В частности, $\det\|L''_{\dot{x}\dot{x}}\| \neq 0$. Связи (не обязательно линейные) задаются уравнениями

$$f_1(\dot{x}, x, t) = \ldots = f_m(\dot{x}, x, t) = 0 \tag{6.1}$$

с независимыми ковекторами

$$\frac{\partial f_1}{\partial\dot{x}}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial\dot{x}}.$$

Уравнения движения можно представить в виде уравнений Лагранжа со множителями

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial x} = \sum_{s=1}^{m}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial\dot{x}}, \quad f_1 = \ldots = f_m = 0. \tag{6.2}$$

**Предложение 6.** *Если функции $L, f_1, \ldots, f_m$ удовлетворяют сформулированным выше условиям, то каждому начальному состоянию системы, допустимому связями* (6.1)*, отвечает единственное решение уравнений* (6.2).

Действительно, в этих предположениях по теореме о неявных функциях множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ являются гладкими функциями от $\dot{x}$, $x$ и $t$.

Предположим теперь, что уравнения (6.2) имеют первый интеграл $F(\dot{x}, x, t)$. Имеет место следующее:

**Предложение 7.** *Если ковекторы* $\dfrac{\partial F}{\partial \dot x}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial \dot x}$, $\ldots$, $\dfrac{\partial f_m}{\partial \dot x}$ *независимы, то функция* $x(t)$ *является решением уравнений* (6.2) *с постоянной интеграла* $F = c$ *тогда и только тогда, когда эта функция является движением механической системы с лагранжианом* $L$ *и со связями* $f_1 = \ldots = f_m = f_{m+1} = c$, *где* $f_{m+1} = F - c$.

В одну сторону утверждение очевидно: функция $x(t)$ удовлетворяет уравнениям вида (6.2), в которых надо положить $\lambda_{m+1} = 0$. Обратно, пусть $x(t)$ — решение системы вида (6.2), в которой индекс $s$ пробегает значения от 1 до $m + 1$. Пусть $y(t)$ — единственное движение исходной системы (6.2) с начальными данными $y(0) = x(0)$, $\dot y(0) = \dot x(0)$. Очевидно, что $F\big|_{y(t)} = c$. Функция $y(t)$, как и функция $x(t)$, удовлетворяет уравнениями движения «расширенной» системы, причем $\lambda_{m+1} = 0$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться заключением предложения 6.

Укажем одно из возможных применений предложения 7. Предположим, что функции $f_i$ линейны по скоростям, а связи (6.1) неинтегрируемы. Если уравнения движения имеют линейный интеграл $F$, то уравнения

$$f_1 = \ldots = f_m = f_{m+1} = 0 \quad (f_{m+1} = F - c)$$

могут оказаться вполне интегрируемыми. В этом случае изучение движений, лежащих на множестве уровня $F = c$, сводится к исследованию некоторой голономной системы. При этом совсем не обязательно интегрировать уравнения связи, поскольку координаты можно считать избыточными и уравнения движения можно записать в виде уравнений Гамильтона в избыточных координатах (см. [11, 15]).

В качестве примера рассмотрим задачу Суслова в однородном силовом поле в интегрируемом случае Е. И. Харламовой. Уравнения $\langle \boldsymbol{a}, \omega\rangle = 0$ и $\langle \mathbf{I}\omega, \boldsymbol{b}\rangle = 0$ образуют на многообразии положений твердого тела (на группе $SO(3)$) интегрируемое поле направлений. Таким образом, в этом случае задача Г. К. Суслова сводится к системе с одной степенью свободы. Правда, одномерное многообразие положений такой системы в общем случае незамкнуто в $SO(3)$.

Если связи нелинейны по скоростям, то в качестве первого интеграла естественно использовать интеграл энергии[1]

$$H(\dot x, x) = \frac{\partial L}{\partial \dot x}\dot x - L.$$

[1] Уравнения движения имеют интеграл энергии, если связи однородны по скоростям и лагранжиан не зависит явно от времени.

Рассмотрим, например, систему Аппеля – Гамеля с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + gz, \quad g = \text{const}$$

и нелинейной связью

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = k^2\dot{z}^2, \quad k = \text{const} \neq 0 \tag{6.3}$$

(см. [16] и [17]). Из интеграла энергии

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - gz = h$$

и уравнения (6.3) получаем уравнение «интегрируемой» связи

$$\frac{\dot{z}(1 + k^2)}{2} - gz = h. \tag{6.4}$$

Следовательно, координата $z$ изменяется с постоянным ускорением $g/(1+k^2)$. Исключая нелинейную интегрируемую связь (6.4) (то есть считая $z$ известной функцией времени), мы приходим к более простой системе с двумя степенями свободы с лагранжианом

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

и связью $\dot{x}^2+\dot{y}^2 = f(t)$, где $f = k^2\dot{z}^2$ — известная квадратичная функция времени. Дальнейшее интегрирование проводится без труда.

## 7. Симметрии неголономных связей

Будем считать, что векторное поле $\boldsymbol{v}(x) \neq 0$ является полем симметрии неголономной системы с лагранжианом $L(\dot{x}, x)$ и связями

$$f_1(\dot{x}, x) = \ldots = f_m(\dot{x}, x) = 0,$$

если фазовый поток $g_v^s$ дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{v}(x)$$

сохраняет функции $L$ и $f_1, \ldots, f_m$.

**Предложение 8.** *Фазовый поток поля симметрий переводит решения неголономной системы в решения той же системы.*

Доказательство. По теореме о выпрямлении, в некоторых локальных координатах $x_1, \ldots, x_n$ фазовый поток $g_v^s$ является следующей однопараметрической группой:

$$x_1 \to x_1 + s; \quad x_2 \to x_2, \ldots, x_n \to x_n.$$

В этих переменных функции $L$ и $f_i$ не зависят от $x_i$, следовательно, уравнения движения тоже не содержат этой переменной. Отсюда вытекает заключение предложения 8. ■

В случае интегрируемых связей полю симметрий отвечает линейный по скоростям первый интеграл уравнений движения. Для неголономных систем это не так.

**Предложение 9.** *Если $g_v^s$ сохраняет лагранжиан и поле $v$ является полем возможных скоростей, то есть*

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} \boldsymbol{v} = \ldots = \frac{\partial f_m}{\partial \dot{x}} \boldsymbol{v} = 0,$$

*то уравнения движения имеют первый интеграл*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} v = \mathrm{const}.$$

Это утверждение («теорема Нетер») обсуждается, например, в работе [6].

**Теорема 4.** *Предположим, что уравнения движения* (6.2) *имеют $n-m$ первых интегралов $f_{m+1}, \ldots, f_n$. Если*

1) *в точках множества $E_c = \{f_1 = \ldots = f_m = 0,\ f_{m+1} = c_{m+1}, \ldots, f_n = c_n\}$ отличен от нуля якобиан*

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n},$$

2) *существуют поля $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$, линейно независимые во всех точках $E_C$ порождающие разрешимую алгебру Ли относительно операции коммутирования, фазовые потоки которых $g_{v_i}^s$ сохраняют функции $L$ и $f_1, \ldots, f_n$,*

3) *среди решений системы уравнений*

$$f_1 = \ldots = f_m = 0, \quad f_{m+1} = c_{m+1}, \ \ldots, \quad f_n = c_n, \tag{7.1}$$

*нет векторов* $\dot{x} = \sum \lambda_s \boldsymbol{v}_s(x)$, $\lambda_s \in \mathbb{R}$, *тогда решения уравнений* (6.2) *лежащие на* $E_c$, *находятся с помощью квадратур.*

Замечание. В некоторых случаях наличие первых интегралов неголономных систем можно установить с помощью следующего наблюдения. Пусть $F(\dot{x}, x)$ — первый интеграл «свободной» голономной системы с лагранжианом $L$. Эта функция является интегралом неголономной системы с тем же лагранжианом $L$ и со связями $f_1 = \ldots = f_m = 0$ в том случае, если

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\right)^{-1} \frac{\partial f_s}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant m,$$

когда $f_1 = \ldots = f_m = 0$. Это инвариантное условие выполнено для интеграла Клебша – Тиссерана в задаче Суслова (теорема 3). Кроме того, оно выполнено для интеграла энергии в случае однородных связей и для интеграла Нетер $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \boldsymbol{v}$, если поле $v$ является полем возможных скоростей (предложение 9).

Доказательство теоремы 4. По теореме о неявных функциях из системы (7.1) найдем, что

$$\dot{x} = \boldsymbol{v}_c(x). \tag{7.2}$$

Согласно условиям 2 и 3, во всех точках $x$ векторы $\boldsymbol{v}_c, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ линейно независимые. Фазовые потоки $g^s_{v_i}$ переводят решения уравнения (7.2) в решения того же уравнения (предложение 8). Для завершения доказательства осталось применить известную теорему Ли об интегрируемости в квадратурах систем дифференциальных уравнений (см., например, [18]). ■

В качестве иллюстративного примера рассмотрим задачу о скольжении уравновешенного конька по горизонтальному льду. Единицы длины, времени и массы можно подобрать так, чтобы лагранжиан принял следующий вид:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{7.3}$$

Здесь $x$, $y$ — координаты точки контакта, $z$ — угол поворота конька. Уравнение связи

$$f = \dot{x} \sin z - \dot{y} \cos z = 0. \tag{7.4}$$

Уравнения движения имеют два первых интеграла

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = h, \quad \dot{z} = c. \tag{7.5}$$

Второй выводится из предложения 9 с помощью векторного поля $\boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 1)$. Из (7.4) и (7.5) найдем поле $\boldsymbol{v}_{h,c} = \big(\sqrt{h-c^2}\cos z, \sqrt{h-c^2}\sin z, c\big)$. Поля $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0)$ и $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 0)$ являются коммутирующими полями симметрии. Если $c \neq 0$, то векторы $\boldsymbol{v}_{h,c}$, $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ линейно независимы. Следовательно, в этом случае все условия теоремы 4 выполнены. Подчеркнем, что поля $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ не порождают законов сохранения.

Теорема 4 налагает жесткие ограничения на неголономную систему. Эти ограничения можно ослабить, заменив условие 2) на условие

2) для фиксированного $c = (c_{m+1}, \ldots, c_h)$ существуют $n-1$ линейно независимых полей $\boldsymbol{v}_i(x, c)$, порождающих разрешимую алгебру Ли и коммутирующих с полем $\boldsymbol{v}_c(x)$.

Добавим к лагранжиану (7.3) слагаемое $-x/2$. Это означает, что мы поместили конек на наклонную плоскость. Уравнения (7.4)–(7.5) останутся справедливыми, если заменить $h$ на $h + x$. Тогда поле $\boldsymbol{v}_{h,c}$ станет равным

$$\big(\sqrt{h-c^2+x}\cos z,\ \sqrt{h-c^2+x}\sin z,\ c\big).$$

При фиксированных значениях $h$ и $c \neq 0$ поля

$$\boldsymbol{v}_1 = \big(2\sqrt{h-c^2+x},\ -(\cos z)/c,\ 0\big), \quad \boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 0)$$

независимы с полем $\boldsymbol{v}_{h,c}$ и все их коммутаторы обращаются в нуль. Точно так же можно решить задачу о качении однородного диска по шероховатой плоскости, задачу о качении шара в вертикальной трубе и ряд других задач неголономной механики.

## 8. Существование инвариантной меры

Наличие интегрального инварианта с положительной плотностью представляет интерес не только для целей интегрирования дифференциальных уравнений. Оно интересно и само по себе, например, с точки зрения возможных применений эргодической теории. Мы рассмотрим вопросы существования инвариантной меры систем дифференциальных уравнений, имея в виду приложения к неголономной механике.

Согласно теореме о выпрямлении траекторий, в достаточно малой окрестности неособой точки всегда существует инвариантная мера с гладкой стационарной плотностью. Поэтому задача об инвариантной мере представляет интерес вблизи положений равновесия, а также в достаточно больших областях фазового пространства, где траектории обладает свойством возвращаемости. Сначала рассмотрим первую возможность. Пусть точка $x = 0$ является равновесием аналитической системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \Lambda x + \ldots \tag{8.1}$$

Будем говорить, что набор (комплексных) собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы $\Lambda$ является резонансным, если $\sum m_i \lambda_i = 0$ при некоторых натуральных значениях $m_i$. Отметим, что при исследовании системы (8.1) (например, в теории нормальных форм) обычно используется более слабое условие резонансности: $\sum m_i \lambda_i = 0$ при некоторых целых $m_i \geqslant 0$ и $\sum |m_i| \neq 0$.

**Предложение 10.** *Если набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ нерезонансный, то в малой окрестности точки $x = 0$ уравнение* (8.1) *не имеет интегрального инварианта с аналитической плотностью.*

Условие нерезонансности выполнено, например, в случае, когда $\operatorname{Re} \lambda_i \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ и $\sum \operatorname{Re} \lambda_i > 0$ $(< 0)$ .

Доказательство. Разложим плотность $M(x)$ в сходящийся ряд по однородным формам:

$$M = M_s + M_{s+1} + \ldots, \quad s \geqslant 0.$$

Ясно, что функция $M_s$ является плотностью интегрального инварианта для линейной системы $\dot{x} = \Lambda x$. Можно сразу считать, что $\Lambda$ приведена к канонической жордановой форме. Расположим мономы формы $M_s$ в некотором лексикографическом порядке:

$$M_s = \sum_{\substack{m_i \geqslant 0 \\ m_1 + \ldots + m_n = s}} a_{m_1 \ldots m_n} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}.$$

Очевидно, что $\operatorname{div} M_s(\Lambda x)$ является некоторой формой той же степени. Приравнивая нулю ее коэффициенты, получим линейную однородную систему уравнений относительно $a_{m_1 \ldots m_n}$. Определитель этой системы равен произведению

$$\prod_{\substack{m_i \geqslant 0 \\ m_1 + \ldots + m_n = s}} \big[(m_1 + 1)\lambda_1 + \ldots + (m_n + 1)\lambda_n\big].$$

Согласно предположению, это произведение отлично от нуля. Следовательно, все $a_{m_1 \ldots m_n} = 0$. Что и требовалось. ∎

Замечание. При более сильном условии отсутствия резонансных соотношений в традиционном смысле уравнения (8.1) не имеют первых интегралов, аналитических в окрестности точки $x = 0$.

В качестве примера рассмотрим задачу о постоянных вращениях выпуклого твердого тела с аналитической выпуклой границей на горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости (см. [4]). Движение такого тела описывается системой шести дифференциальных уравнений, имеющих интеграл энергии и геометрический интеграл. В частном случае, когда одна из главных центральных осей инерции тела ортогональна его поверхности, мы имеем однопараметрическое семейство стационарных вращений вокруг вертикально расположенной оси инерции. Стационарным движением отвечают особые точки уравнений движения. Характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\lambda^2(a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda^1 + a_0) = 0.$$

Коэффициенты $a_s$ довольно сложно выражаются через многочисленные параметры задачи; фактически, они могут принимать произвольные значения. Наличие двойного нулевого корня связано с существованием двух независимых интегралов: в точках, отвечающих перманентным вращениям, дифференциалы интеграла энергии и геометрического интеграла в общем случае независимы. Фиксируя уровни первых интегралов, мы будем иметь дифференциальные уравнения на четырехмерных многообразиях, не имеющие в общем случае инвариантной меры с аналитической плотностью. Следовательно, в окрестности стационарных движений исходные уравнения также не имеют инвариантной меры.

Рассмотрим теперь задачу об инвариантной мере для систем дифференциальных уравнений, близких к интегрируемым системам, удовлетворяющим условиям теоремы 1. В окрестности инвариантных торов невозмущенной интегрируемой системы в качестве независимых переменных естественно принять постоянные первых интегралов $I_1, \ldots, I_{n-2}$ и угловые координаты $x, y \mod 2\pi$ на самих инвариантных торах. В этих переменных возмущенная система будет иметь следующий вид:

$$\dot I_s = \varepsilon f_s(I, x, y) + \ldots, \quad s = 1, \ldots, n-2,$$
$$\dot x = \frac{\lambda(I)}{\Phi(I, x, y)} + \varepsilon X(I, x, y) + \ldots, \quad \dot y = \frac{\mu(I)}{\Phi(I, x, y)} + \varepsilon Y(I, x, y) + \ldots \tag{8.2}$$

Пусть функции, входящие в правые части этих дифференциальных уравнений, являются аналитическими в прямом произведении $D \times T^2$, где $D$ — некоторая область в $\mathbb{R}^{n-2} = \{I_1, \ldots, I_{n-2}\}$, $T^2 = \{x, y \mod 2\pi\}$; $\varepsilon$ — малый параметр. Естественно поставить задачу о существовании у системы (8.2) инвариантной меры, плотность которой аналитична по переменным $I$, $x$, $y$, $2\pi$-периодична по $x$, $y$ и аналитически зависит от параметра $\varepsilon$:

$$M = M_0 + \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 M_2 + \ldots \tag{8.3}$$

Невозмущенная задача имеет инвариантную меру с плотностью $M_0$. В соответствии с известным принципом усреднения, усредним правые части системы (8.2) по мере $dm = \Phi\, dx \wedge dy$. В результате получим замкнутую систему уравнений для изменения медленных переменных $I$ в области

$$\begin{gathered}\dot{I}_s = \varepsilon F_s(I), \quad 1 \leqslant s \leqslant n-2, \\ F_s = \frac{1}{\Lambda} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f_s \Phi\, dx\, dy, \quad \Lambda = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Phi\, dx\, dy.\end{gathered} \tag{8.4}$$

**Предложение 11.** *Предположим, что* $m\lambda(I) + n\mu(i) \not\equiv 0$ *в области* $D$ *при всех целых* $m$, $n$ *не равных одновременно нулю. Если усредненная система* (8.4) *не имеет инвариантной меры с аналитической плотностью, то исходная система* (8.2) *также не имеет инвариантной меры с плотностью* (8.4).

Система (8.4) проще системы (8.2); достаточное условие отсутствия инвариантной меры у (8.4) дает предложение 10.

Доказательство предложения 11. Коэффициенты $M_0$ и $M_1$ разложения (8.4) удовлетворяют уравнениям

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{M_0}{\Phi} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{M_0}{\Phi} = 0, \tag{8.5}$$

$$\sum_s \frac{\partial}{\partial I_s}(M_0 f_s) + \frac{\partial}{\partial x} M_0 X + \frac{\partial}{\partial y} M_0 Y = -\Big(\lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{M_1}{\Phi} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{M_1}{\Phi}\Big). \tag{8.6}$$

Поскольку $\lambda/\mu$ иррационально почти при всех $I \in D$, то из уравнения (8.5) вытекает, что $M_0 = \Gamma(I)\Phi$. Подставляя это соотношение в уравнение (8.6) и усредняя затем по переменным $x$, $y$, получим следующее уравнение

$$\sum_s \frac{\partial}{\partial I_s} \Gamma F_s = 0. \tag{8.7}$$

Следовательно, функция $\Gamma$ — плотность интегрального инварианта для системы (8.4). Осталось показать, что $\Gamma \not\equiv 0$. Если это не так, то $M_0 = 0$. Но тогда функция $M_1 + \varepsilon M_2 + \ldots$ является плотностью инвариантной меры для системы (8.2). Если $M_1 \equiv 0$, то эту операцию можно повторить еще раз. Предложение доказано. ■

Замечание. Можно показать, что (в условиях предложения 11), если усредненная система (8.4) не имеет аналитического первого интеграла в области $D$, то исходная система (8.2) не имеет интеграла в виде ряда $g_0 + \varepsilon g_1 + \ldots$ с аналитическими в $D \times T^2$ коэффициентами $g_s$.

Рассмотрим более подробно частный случай, когда $n = 3$. Индекс $s$ можно опустить. Пусть $F(I) \not\equiv 0$. Если в некоторой точке интервала $D$ функция $F(I) = 0$, то уравнение (8.4) не имеет, очевидно, инвариантной меры. Так мы будем считать, что $F(I) \neq 0$ в $D$. Рассмотрим следующие разложения Фурье:

$$\frac{X\Phi}{F} = \sum X_{mn}(I) \exp i(mx + ny),$$

$$\frac{Y\Phi}{F} = \sum Y_{mn}(I) \exp i(mx + ny),$$

$$\frac{f\Phi}{F} = \sum f_{mn}(I) \exp i(mx + ny).$$

Резонансным множеством $\Delta$ назовем множество точек $I \in D$, для которых

$$\sum_{|m|+|n|\neq 0} \left|\frac{a_{mn}}{m\lambda + n\mu}\right|^2 = \infty, \quad a_{mn} = \frac{df_{mn}}{dI} + i(mX_{mn} + nY_{mn}).$$

**Предложение 12.**

1) *Предположим, что* $\lambda(I)/\mu(I) \not\equiv \mathrm{const}$*;*

2) *пересечение* $\Delta \cap D$ *не пусто.*

*Тогда уравнения* (8.2) *не имеют интегрального инварианта с плотностью* (8.3).

Действительно, из соотношения (8.7) получим, что $\Gamma = c/F$, где $c = \mathrm{const}$. Пусть

$$\frac{M_1}{\Phi} = \sum b_{mn}(I) \exp i(mx + ny).$$

Уравнение (8.6) даст нам серию соотношений

$$-(m\lambda + n\mu)b_{mn} = ca_{mn}.$$

Пусть $I \in \Delta$. Тогда из условия

$$\sum |b_{mn}|^2 < \infty$$

получим, что $c = 0$. Что и требовалось.

Автор благодарен В. Ф. Журавлеву, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд замечаний.

## Литература


[1] *Аппель П.* Теоретическая механика, т. 2, Физматгиз, Москва 1960.

[2] *Caratheodory C.* Der Schlitten, ZAMM, 13, 71–76, 1933.

[3] *Карапетян А. В.* О реализации неголономных связей и об устойчивости кельтских камней, ПММ, 45, 1, 42–51, 1981.

[4] *Карапетян А. В.* О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, ПММ, 45, 5, 808–814, 1981.

[5] *Чаплыгин С. А.* Исследования по динамике неголономных систем, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1949.

[6] *Козлов В. В., Колесников Н. Н.* О теоремах динамики, ПММ, 42, 1, 28–33, 1978.

[7] *Rumyantsev V. V., Sumbatov A. V.* On the problem of generalization of the Hamilton-Jacoby method for non-holonomic systems, ZAMM, 58, 477–481, 1978.

[8] *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем, «Наука», Москва 1967.

[9] *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе, ДАН СССР, 93, 5, 763–766, 1953.

[10] *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела, Изд-во МГУ, Москва 1980.

[11] *Суслов Г. К.* Теоретическая механика, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1946.

[12] *Харламова-Забелина Е. И.* Быстрое вращение твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии неголономной связи, Вестн. МГУ, Сер. 1, Математика, механика, 25–34, 1957.

[13] *Харламов П. В.* Гиростат с неголономной связью, В сб. Механика твердого тела, «Наукова думка», 3, 120–130, Киев 1971.

[14] *Зиглин С. Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике, II, Функциональный анализ и его приложения, 17, 1, 8–23, 1983.

[15] *Козлов В. В.* Уравнения Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах, Teorijska i primenjena mechanika, 8, 59, 1982.

[16] *Appell P.* Exemple de mouvement d'un assujetti, a une exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de la vitesse, Rend. Circolo Mat. Palermo, 48–50, 1911.

[17] *Hamel G.* Tehoretische Mechanik, Berlin 1949.

[18] *Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1940.