ния n) начального сечения струи (рис. 2): при $n=2$ эффективная амплитуда имеет порядок $10A$ (см. [1]), а при $n=5$ ее значение становится величиной $\sim 50\ A$. Отметим, что минимум $\sqrt{\varkappa_{21}^2+\varkappa_{22}^2}$ при фиксированном n соответствует максимально растущему волновому числу.

Из расчетов для второго приближения следует, что эффект второго порядка — вклад нелинейных членов ω_2 в коэффициенты усиления — также возрастает по мере увеличения целочисленного парамет-

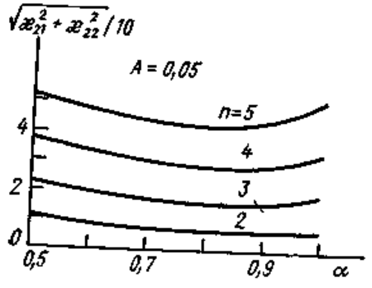

Рис. 2

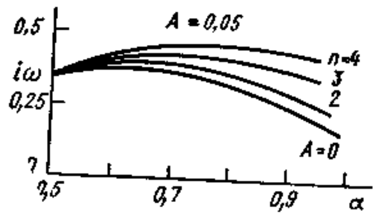

Рис. 3

ра n. На рис. 3 показана зависимость коэффициентов усиления для капиллярных струй различного начального сечения (разные n) от продольного волнового числа α. Чем больше «лепестков» в поперечном сечении, тем более неустойчива соответствующая капиллярная струя, что объясняется, по-видимому, увеличением локальной кривизны и поверхностного натяжения. Заметно также, что для струй более сложных сечений характерными становятся более короткие волны. С увеличением параметра несимметричности A распад струи конкретного сечения ускоряется и характерные длины волн уменьшаются.

Изложенные результаты качественно согласуются с экспериментальными данными. Эксперименты [1], проведенные для капиллярных струй, вытекающих из эллиптического, треугольного и квадратного отверстий, показали, что «квадратная» струя менее устойчива, чем «треугольная», а «треугольная» менее устойчива, чем «эллиптическая».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герценштейн С. Я., Шкадов В. Я. Устойчивость неосесимметричных жидких струй. — Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1973, № 1, 43—52.
2. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. — Науч. тр. Ин-та механ. Моск. ун-та, 1973, № 25.
3. Borh N. Determination of the surface tension of water by method of jet vibration.— Phil. Trans. Roy. Soc. London A, 1909, N 209, 281—309.

Поступила в редакцию
13.05.83

УДК 517.9+531.31

В. В. Козлов

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ ПО ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ В СИЛОВОМ ПОЛЕ С ПОТЕНЦИАЛОМ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

1. Пусть точка единичной массы движется по евклидовой трехмерной сфере $S^3=\{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\}$ под действием потенциальных сил с потенциалом $U(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Уравнения движения запишем с помощью множителя Лагранжа:

$$\ddot{x}_s=-\frac{\partial U}{\partial x_s}+\lambda x_s,\quad \sum x_s^2=1,\qquad 1\leqslant s\leqslant 4. \tag{1}$$

Следуя общему методу избыточных координат [1, 2], представим эти уравнения в виде гамильтоновой системы с четырьмя степенями свободы. Для этого положим

$$y_s=\dot{x}_s+\mu x_s,\quad \sum x_s\dot{x}_s=0,\qquad 1\leqslant s\leqslant 4, \tag{2}$$

где μ — пока не определенный множитель. Система (2) определяет $\dot{x}_s$ и μ в виде функций от x, y. Введя по общему правилу функцию Гамильтона

$$H=\sum y_s\dot{x}_s-L,\qquad L=\frac{1}{2}|\dot{x}|^2-U(x),$$

нетрудно получить для нее следующее явное выражение:

$$H=\frac{1}{2f}(\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2)+U,$$

где

$$\Delta_1=y_1x_4-y_4x_1+y_2x_3-y_3x_2,\quad \Delta_2=y_2x_4-y_4x_2+y_3x_1-y_1x_3,$$
$$\Delta_3=y_3x_4-y_4x_3+y_1x_2-y_2x_1,\quad f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

Хорошо известно, что уравнения Гамильтона

$$\dot{x}_s=\frac{\partial H}{\partial y_s},\quad \dot{y}_s=-\frac{\partial H}{\partial x_s},\qquad 1\leqslant s\leqslant 4, \tag{3}$$

на поверхности $f=1$ эквивалентны уравнениям (1). Гамильтонова система (3) имеет два интеграла: вдоль решений сохраняются функции H и f. Для ее полной интегрируемости недостает двух независимых интегралов в инволюции. Отметим два случая интегрируемости, когда потенциал является линейной или квадратичной функцией переменных x. Первый случай отвечает «сферическому маятнику», второй — задаче Неймана [3, 4]. Впрочем, этот результат справедлив и для задачи о движении точки по n-мерной сфере при всех $n\geqslant 1$.

Теорема. *Система (3) вполне интегрируема для потенциалов следующего вида:*

$$(u_1-u_2)(v_1-v_2)(x_1^2x_2^2+x_3^2x_4^2)+(u_3-u_1)(v_3-v_1)(x_1^2x_3^2+x_2^2x_4^2)+$$
$$+(u_2-u_3)(v_2-v_3)(x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2)+2[v_1(u_2-u_3)+v_2(u_3-u_1)+$$
$$+v_3(u_1-u_2)]x_1x_2x_3x_4, \tag{4}$$

где u_s, v_s — произвольные вещественные постоянные.

Полагая $\varepsilon u_s = v_s$, приходим к потенциалу

$$\varepsilon\varepsilon_1^2(x_1^2x_2^2 + x_3^2x_4^2) + \varepsilon\varepsilon_2^2(x_1x_3^2 + x_2^2x_4^2) + \varepsilon\varepsilon_3^2(x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2), \qquad (5)$$

где ε, ε_s — постоянные, $\Sigma\varepsilon_s = 0$.

В связи с этим результатом возникают два вопроса:

1) можно ли представить в ϑ-функциях времени общее решение уравнений (3) для потенциалов (4), (5)?

2) существуют ли естественные обобщения потенциала (5) для многомерного случая, когда уравнения движения остаются вполне интегрируемыми?

Ответ на первый вопрос, по-видимому, положителен.

2. Оказывается, интегрируемость уравнений (1) с потенциалом (4) тесно связана с интегрируемостью задачи о вращении твердого тела с неподвижной точкой в общем случае ньютоновского силового поля (в классическом приближении, когда размеры гравитирующих тел много меньше расстояния между ними).

Поскольку трехмерная сфера S^3 является двулистным накрытием группы SO(3) — пространства положений твердого тела с неподвижной точкой, — то гамильтонову систему на $T^*SO(3)$, которая описывает вращение тела, можно поднять до гамильтоновой системы на T^*S^3. Это можно осуществить в явном виде с помощью введения кватернионов [2]. Множество кватернионов $q = x_1i + x_2j + x_3k + x_4$ с единичной нормой $|q|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ можно считать пространством положений твердого тела (см., например, [5]). Приняв координаты x_s за избыточные, можно найти явное выражение для функции Гамильтона:

$$\frac{1}{8f}\left(\frac{\Delta_1^2}{I_1} + \frac{\Delta_2^2}{I_2} + \frac{\Delta_3^2}{I_3}\right) + V,$$

где I_s — главные моменты инерции тела, V — потенциал силового поля, который является функцией девяти направляющих косинусов α_s, β_s, γ_s ($1 \leqslant s \leqslant 3$). В случае ньютоновского притяжения

$$V = -\frac{A}{2}(I\alpha,\ \alpha) - \frac{B}{2}(I\beta,\ \beta) - \frac{C}{2}(I\gamma,\ \gamma). \qquad (6)$$

Здесь $I = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — оператор инерции тела; A, B, C — произвольные постоянные.

Как показано в работах [6, 7, 8], уравнения вращения твердого тела в силовом поле с потенциалом (6) вполне интегрируемы: кроме интеграла энергии они имеют еще два независимых интеграла в инволюции. Приведем один из них, записанный в избыточных канонических координатах x, y:

$$F = \frac{1}{8f}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2) + U_*,$$

$$U_* = \frac{A\det I}{2}(I^{-1}\alpha,\ \alpha) + \frac{B\det I}{2}(I^{-1}\beta,\ \beta) + \frac{C\det I}{2}(I^{-1}\gamma,\ \gamma).$$

В отсутствие поля сил этот интеграл выражает постоянство квадрата величины кинетического момента тела. Используя известные формулы, связывающие косинусы α, β, γ с переменными x (см. [5]), можно найти явное выражение для функции U_*. Оказывается, если положить $u_s = \frac{8}{I_s}$, $v_1 = A\det I$, $v_2 = B\det I$, $v_3 = C\det I$, то функция U_* будет равной $U/4 + U_{**}$, где U дано формулой (4), а U_{**} зависит лишь от f. В силу постоянства f на действительных траекториях добавок U_{**} можно опустить. Сравнивая выражения для функций F и H, мы замечаем, что они различаются лишь несущественным постоянным множителем. Так как F коммутирует с функцией f и еще с двумя независимыми функциями переменных x, y, то гамильтонова система с гамильтонианом F (или, что то же самое, H) вполне интегрируема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.—Л., 1946.
2. Козлов В. В. Уравнения Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах. — Teorijska i primenjena mehanika, 1982, 8, 59—65.
3. Neumann C. De problemate quodam mechanico, quod ad priam integralium ultraellipticorum classem revocatur. — J. reine und angew. Math., 1859, 56, 46—63.
4. Мозер Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем. — Успехи матем. наук, 1981, 36, вып. 5, 109—151.
5. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.—Л., 1937.
6. Brun F. Rotation kring fix punkt. II, III. — Ark. mat., astron., fis., 1907, 4, N 4, 1—4; 1909, 6, N 1, 1—10.
7. Богоявленский О. И. Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле. — Докл. АН СССР, 1984, 275, № 6, 1359—1363.
8. Bogoyavlensky O. I. New integrable problem of classical mechanics. — Communs Math. Phys., 1984, 94, 255—269.

Поступила в редакцию
31.10.84