ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1983

ТОМ 272 № 3

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

УДК 531.31

МЕХАНИКА

В.В. КОЗЛОВ

РЕАЛИЗАЦИЯ НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ СВЯЗЕЙ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

(Представлено академиком Л.И. Седовым 4 I 1983)

1. Рассмотрим многомерную натуральную механическую систему с лагранжианом

$$L_\epsilon = \frac{1}{2}\,(A(q)\,\dot q\,\cdot\dot q) + \frac{\alpha\epsilon}{2}\,(a(q)\cdot\dot q)^2 + V(q).$$

Предположим, что, кроме потенциальных сил с силовой функцией $V(q)$, на систему действуют диссипативные силы с функцией Релея

$$F_\epsilon = -\frac{\beta\epsilon}{2}\,(a(q)\cdot\dot q)^2.$$

Уравнение движения имеет вид уравнения Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_\epsilon}{\partial\dot q} - \frac{\partial L_\epsilon}{\partial q} = \frac{\partial F_\epsilon}{\partial\dot q}. \tag{1}$$

Фиксируя значения параметров $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$, устремим ϵ к бесконечности. Задача состоит в том, чтобы описать предельные решения уравнения (1). Предполагается, что метрический тензор $A(q)$, ковектор $a(q)$ и силовая функция $V(q)$ гладко зависят от обобщенных координат q, причем $a(q) \neq 0$.

Т е о р е м а. *Пусть $q(t, \dot q_0, q_0, \epsilon)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, – решение уравнения* (1) *с начальным состоянием $\dot q_0, q_0$, не зависящим от ϵ и удовлетворяющим условию $a(q_0)\cdot \dot q_0 = 0$. Тогда на каждом конечном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T_1 < T$ существует*

$$\lim_{\epsilon\to\infty} q(t, \dot q_0, q_0, \epsilon) = \hat q(t, \dot q_0, q_0).$$

Предельное движение $\hat q(t)$ вместе с некоторой "сопряженной" функцией $\hat p(t)$ удовлетворяют каноническим дифференциальным уравнениям

$$(2) \qquad \dot p = -\frac{\partial H_0}{\partial q} - \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{(A^{-1}p\cdot a)\,a}{A^{-1}a\cdot a}, \qquad \dot q = \frac{\partial H_0}{\partial p},$$

где $H_0 = p\cdot \dot q - L_0\,\big|_{\dot q\to p}$ *и*

$$(3) \qquad \dot q = A^{-1}p - \frac{(A^{-1}p\cdot a)A^{-1}a}{A^{-1}a\cdot a}.$$

Из последнего соотношения, совпадающего с уравнением Гамильтона $\dot q = (H_0)'_p$, следует, что предельное движение $\hat q(t)$ при всех t удовлетворяет "уравнению связи"

$$(4) \qquad a(q)\cdot \dot q = 0.$$

Если $\beta = 0$, то уравнения (2) будут уравнениями экстремалей вариационной задачи Лагранжа о стационарном значении функционала действия

$$\int_{t_1}^{t_2} L_0(\dot q(t), q(t))\,dt$$

в классе кривых с закрепленными концами, удовлетворяющих уравнению (4). Таким образом, в этом случае после предельного перехода мы получаем механическую систему с лагранжианом L_0, на которую наложена линейная связь (4), причем движение определяется с помощью естественного обобщения вариационного принципа Гамильтона. Когда связь $a\cdot \dot q = 0$ интегрируема, то уравнения (2) являются уравнениями Гамильтона голономной системы, записанными в избыточных координатах. В случае неинтегрируемых связей вариационный принцип Гамильтона дает уравнения, отличные от традиционных неголономных уравнений. Эта новая математическая модель движения систем с неинтегрируемыми связями (которую для краткости назовем вакономной динамикой) подробно обсуждается в работах [1–3], где можно найти необходимые ссылки.

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда отношение β/α велико. Следуя общему методу изучения сингулярных уравнений, при $\alpha = 0$ из (2) получим "упрощенное" уравнение

$$\lambda = \frac{A^{-1}p\cdot a}{A^{-1}a\cdot a} = 0.$$

Дифференцируя уравнение $A\dot q = p - \lambda a$ по времени и учитывая условие $\lambda = 0$, будем иметь

$$(5) \qquad \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L_0}{\partial \dot q} = (A\dot q)^{\cdot} = \dot p - \dot\lambda a - \lambda\dot a = -\frac{\partial H_0}{\partial q} - \dot\lambda a = \frac{\partial L_0}{\partial q} - \dot\lambda a.$$

Это соотношение вместе в уравнением связи (4) являются замкнутой системой неголономных уравнений движения, эквивалентной принципу Даламбера–Лагранжа. Используя известную теорему Тихонова, можно доказать, что при $\mu = \beta/\alpha \to +\infty$ решения уравнений (2) на каждом конечном интервале времени $0 < t \leqslant T_1$ действительно стремятся к решениям неголономных уравнений (5). Задача о реализации неголономных связей силами вязкого трения впервые рассмотрена в работе Каратеодори [4] (см. также [5–6]).

При каждом фиксированном значении параметра μ уравнения (2) можно рассматривать как уравнения движения механической системы с функцией Лагранжа L_0 и со связью $a(q)\cdot\dot q = 0$. Таким образом, мы имеем целое семейство внутренне непротиворечивых математических моделей движения. Каждая из них является синтезом традиционной неголономной динамики, основанной на принципе Даламбера–Лагранжа, и вакономной динамики, в основу которой положен вариационный принцип Гамильтона. Вопрос о выборе модели в каждом конкретном случае может быть решен только с помощью экспериментов.

2. Доказательство теоремы о предельном переходе основано на методе работы [2], в которой рассмотрен частный случай $\beta = 0$. Введем канонические импульсы

$$p = \frac{\partial L_\epsilon}{\partial \dot q} = A\dot q + \alpha\epsilon(a\cdot\dot q)\,a$$

и разрешим это уравнение относительно обобщенных скоростей:

$$A\dot q = p - \frac{A^{-1}p\cdot a}{A^{-1}a\cdot a}\,a + \frac{1}{1+\alpha\epsilon(A^{-1}a\cdot a)}\,\frac{A^{-1}p\cdot a}{A^{-1}a\cdot a}\,a.$$

При $\epsilon\to\infty$ оно перейдет в соотношение (3), с помощью которого вводятся "вакономные" импульсы. Вычислим функцию Гамильтона:

$$H_\epsilon = p\cdot\dot q - L_\epsilon = H_0 + O(1/\epsilon).$$

Канонические уравнения движения суть

$$\dot p = -\frac{\partial H_\epsilon}{\partial q} - Q,\quad \dot q = \frac{\partial H_\epsilon}{\partial p}, \tag{6}$$

где сила трения

$$Q = \frac{\partial F_\epsilon}{\partial \dot q} = -\beta\epsilon(a\cdot\dot q)\,a = -\frac{\beta\epsilon}{\alpha\epsilon(A^{-1}a\cdot a)+1}\,(A^{-1}p\cdot a)\,a.$$

Начальные условия q_0 и $p_0 = A(q_0)\dot q_0$ не зависят от ϵ. Следовательно, при $\epsilon\to\infty$ решения уравнений (6) стремятся к решениям уравнений (2) с теми же начальными условиями.

3. В качестве первого примера рассмотрим скольжение уравновешенного конька по наклонной плоскости [2–3]. Пусть x, y – координаты точки контакта лезвия конька с плоскостью (ось y горизонтальна, а ось x направлена вниз), φ – угол поворота конька (отсчитываемый от оси x). Неинтегрируемая связь задается уравнением $\dot x\sin\varphi - \dot y\cos\varphi = 0$. Единицы измерения массы, длины и времени выберем так, чтобы лагранжиан имел наиболее простой вид:

$$L_0 = \frac{1}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot\varphi^2) + x.$$

Положим $\lambda = p_y\cos\varphi - p_x\sin\varphi$, $\nu = p_x\cos\varphi + p_y\sin\varphi$, где p_x, p_y – "вакономные" импульсы. С учетом этих обозначений уравнения движения можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}\dot\lambda = +\nu\dot\varphi - \mu\lambda + \sin\varphi,\quad \dot\nu = -\lambda\dot\varphi + \cos\varphi,\quad \ddot\varphi = \lambda\nu,\\ \dot x = \nu\cos\varphi,\quad \dot y = \nu\sin\varphi.\end{gathered} \tag{7}$$

При больших μ конек движется почти по неголономной траектории – циклоиде

$$x = \frac{\sin^2 \omega t}{2\omega^2}, \quad y = \frac{1}{2\omega^2}\left(\omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2}\right),$$

которая является решением уравнений (7) при "$\mu = \infty$".

Уравнения (7), по-видимому, не интегрируемы. Среди простых приближенных решений отметим следующее:

$$\lambda = +\frac{2}{\mu}\sin\omega t, \quad \nu = \frac{1}{\omega}\sin\omega t + \frac{2}{\mu}\cos\omega t.$$

Это решение тем точнее, чем больше μ и ω. Средние скорости точки контакта равны $\langle \dot{x} \rangle = \mu^{-1}$, $\langle \dot{y} \rangle = (2\omega)^{-1}$. Таким образом, в среднем конек соскальзывает по наклонной прямой

(8) $\quad x = t/\mu, \quad y = t/2\omega,$

равномерно вращаясь с большой угловой скоростью.

При $\mu = 0$ вакономное движение конька можно реализовать с помощью задачи о падении узкой и длинной пластинки в идеальной жидкости (см. [3]). В случае вязкой жидкости падение пластинки качественно похоже на соскальзывание конька при $\mu > 0$: движение (8) совершает падающая в воздухе узкая полоска бумаги.

4. В заключение рассмотрим задачу о вращении по инерции твердого тела вокруг неподвижной точки с неинтегрируемой связью: проекция угловой скорости на одну из главных осей инерции равна нулю.

Уравнения вращения приводятся к системе

(9) $\quad I_1\dot{\omega}_1 - \lambda\omega_2 = 0, \quad I_2\dot{\omega}_2 + \lambda\omega_1 = 0, \quad \dot{\lambda} + \mu\lambda + (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2 = 0$

Здесь ω_1, ω_2 – проекции угловой скорости на главные оси с моментами инерции I_1 и I_2, λ – предельное значение проекции кинетического момента на третью ось.

При $\mu = 0$ уравнения (9) имеют два интеграла

$$I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2, \quad I_1^2\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + \lambda^2,$$

с помощью которых они интегрируются в эллиптических функциях времени. Вращение тела в неподвижном пространстве E^3 можно описать с помощью представления Пуансо. Вектор $K = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, \lambda)$ неподвижен в E^3. Эллипсоид инерции, вырождающийся в эллиптическую пластинку $I_1x_1^2 + I_2x_2^2 = 1$, катится без проскальзывания по неподвижной плоскости в E^3, перпендикулярной вектору K.

При $\mu > 0$ уравнения (9) просто интегрируются в симметричном случае, когда $I_1 = I_2 = I$:

$$\lambda = \omega e^{-\mu t}, \quad \omega_1 = a\sin\frac{\omega e^{-\mu t}}{\mu I} + b\cos\frac{\omega e^{-\mu t}}{\mu I},$$

$$\omega_2 = a\cos\frac{\omega e^{-\mu t}}{\mu I} - b\sin\frac{\omega e^{-\mu t}}{\mu I} \quad (a,\ b,\ \omega = \mathrm{const}).$$

Если $\mu \to 0$, то получаем, очевидно, решения вакономных уравнений (гармонические колебания), если же $\mu \to \infty$, то скорости ω_1 и ω_2 стремятся к постоянным величинам (как в неголономной модели).

В общем случае существует лишь один первый интеграл – сохраняется кинетическая энергия вращения $I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 = h$. Перейдем к полярным координатам

$$\omega_1 = \sqrt{h/I_1}\,\sin\varphi, \quad \omega_2 = \sqrt{h/I_2}\,\cos\varphi.$$

В переменных λ и φ уравнения (9) запишутся так:

$$\dot\varphi - \frac{\lambda}{\sqrt{I_1 I_2}} = 0, \quad \dot\lambda + \mu\lambda + \frac{(I_1 - I_2)h}{\sqrt{I_1 I_2}} \sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

откуда

$$\ddot\varphi + \mu\dot\varphi + \frac{(I_1 - I_2)h}{I_1 I_2} \sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Это уравнение описывает динамику одномерной механической темы с полной энергией

$$E = \frac{\dot\varphi^2}{2} - \frac{(I_1 - I_2)h}{4 I_1 I_2} \cos 2\varphi,$$

на которую действуют силы вязкого трения с коэффициентом вязкости $\mu > 0$. Если $I_1 > I_2$, то с вероятностью 1 угол $\varphi \to 0$, если же $I_1 < I_2$, то $\varphi \to \pi/2$. В первом случае почти наверное $\omega_1 \to 0$, $\omega_2 \to \sqrt{h/I_2}$, во втором – $\omega_1 \to \sqrt{h/I_1}$, $\omega_2 \to 0$. Следовательно, если $\mu > 0$, то твердое тело с качественной точки зрения вращается так же, как при наличии вязкого трения: оно асимптотически стремится к устойчивому постоянному вращению вокруг меньшей оси инерции. Подчеркнем, что это сходство чисто внешнее. Энергия вращения твердого тела при всех значениях $\mu \geqslant 0$ сохраняется в силу уравнений (9). Этот вывод справедлив, конечно, и для канонических уравнений самого общего вида.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
21 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В.* – Вестн. МГУ. Сер. матем.-мех., 1982, № 3. 2. *Козлов В.В.* – Там же, 1982, № 4. 3. *Козлов В.В.* – Там же, 1983, № 3. 4. *Caratheodory C.* – Z. angew. Math. Mech., 1933, Bd. 13 5. *Карапетян А.В.* – ПММ, 1981, т. 45, вып. 1. 6. *Бренделев В.Н.* – ПММ, 1981, т. 45, вып. 3.