Функциональный анализ и его приложения,
1982, т. 16, вып. 4, 72—73.

УДК 517.9

ГИПОТЕЗА О СУЩЕСТВОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

В. В. Козлов

1. Движение механических систем описывается известными уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad x \in \mathbf{R}^n$$

с «натуральным» лагранжианом $L = k(\dot{x}, x) - u(x)$, где $k = \langle K(x)\dot{x}, \dot{x}\rangle / 2$ — положительно определенная квадратичная форма (кинетическая энергия), а u: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — потенциальная энергия системы. Координаты x всегда можно выбрать так, чтобы $K(0) = E$. Пусть $u'(0) = 0$. Тогда $x(t) \equiv 0$ — «равновесное» решение уравнений Лагранжа. Решение $x(t) \not\equiv 0$ назовем асимптотическим, если $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Из интеграла энергии $k + u = \mathrm{const}$ следует, что тогда $\dot{x}(t)$ тоже стремится к нулю. Если $u(x)$ имеет в точке $x = 0$ локальный минимум (не обязательно строгий), то уравнения Лагранжа не имеют асимптотических решений (к точке $x = 0$). Кажется правдоподобным, что асимптотические решения существуют, если $x = 0$ не является точкой локального минимума аналитической функции $u(x)$. В бесконечно дифференцируемом случае это уже не так. Поскольку уравнения движения обратимы (функция $x(-t)$ тоже является решением), то из существования асимптотических решений вытекает неустойчивость равновесия $x = 0$. Обратное неверно. Вот простой пример: $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $L = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + x_1^2$.

Теорема. *Пусть $x = 0$ — критическая точка аналитической функции $u(x)$, которая не является ее локальным минимумом. Асимптотическое решение (к точке $x = 0$) уравнений Лагранжа существует, если выполнено одно из следующих условий*:

А) *$u(x)$ — квазиоднородная функция,*

Б) *$u(x)$ — полуквазиоднородная функция,*

В) *$n = 2$ и $x = 0$ — изолированная критическая точка $u(x)$.*

2. При доказательстве теоремы используется следующая

Лемма. *Пусть $x = 0$ — изолированная критическая точка гладкой функции $u(x)$, которая не является ее локальным минимумом. Если в области $U_\varepsilon^- = \{x: |x| < \varepsilon,\ u(x) < 0\}$ существует дифференцируемое векторное поле $v(x)$ такое, что*

1) $\langle v, u'\rangle \leqslant 0$ *в* U_ε^-,

2) $\langle v'\xi, \xi\rangle \geqslant c\xi^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n, \quad \forall x \in U_\varepsilon^-$ $(c = \mathrm{const} > 0)$,

3) $|v(x)| = O(|x|)$ *при* $x \to 0$,

то уравнения Лагранжа имеют асимптотическое решение.

Для доказательства рассмотрим дифференцируемую функцию времени $f(t) = \langle w(x), \partial k/\partial \dot{x}\rangle|_{x(t)}$, где $w = v - \sigma u'$. При малых $\sigma > 0$ и $|x|$ справедлива оценка $\dot{f} \geqslant c_1 \dot{x}^2 + \sigma u'^2$, $c_1 > 0$ (см. [1]). Пусть решение $x(t)$ лежит на нулевом уровне энергии. Так как $f(t)$ ограничена, когда $x(t) \in \bar{U}_\varepsilon^-$, и $\dot{f} \geqslant \sigma u'^2$, то $x(t)$ либо покинет за конечное время малую область $\bar{U}_\varepsilon^-$, либо будет асимптотически приближаться к точке $x = 0$. Предположим, что уравнения не имеют асимптотических решений. Пусть $x_m \in U_\varepsilon^-$ и $x_m \to 0$ при $m \to \infty$. Проходящие через них траектории покидают область $\bar{U}_\varepsilon^-$, пересекая сферу $|x| = \varepsilon$ в некоторых точках y_m с некоторыми скоростями v_m. Рассмотрим последовательность решений $x_m(t)$ с начальными условиями $x_m(0) = y_m$, $\dot{x}_m(0) = -v_m$. Для любого $T > 0$, начиная с некоторого номера m, значения $x_m(t) \in \bar{U}_\varepsilon^-$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Последовательность функций $x_m(t)$: $[0, T] \to \bar{U}_\varepsilon^-$ равностепенно непрерывна (так как согласно интегралу энергии $|\dot{x}| \leqslant \varkappa$, $\varkappa > 0$). По теореме Арцела, существует подпоследовательность $x_{m_p}(t)$, сходящаяся на $[0, T]$ к некоторой непрерывной функции $x^{(1)}(t)$. Начиная с некоторого номера p определены функции $x_{m_p}(t)$: $[0, 2T] \to \bar{U}_\varepsilon^-$, причем из этой последовательности можно выделить подпоследовательность равномерно сходящуюся к функции $x^{(2)}(t)$. На $[0, T]$ функции $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$

совпадают. Продолжая этот процесс неограниченно, получим предельную непрерывную функцию $x(t)$: $[0, \infty) \to \bar{U}_\varepsilon^-$. Поскольку решения непрерывно зависят от начальных данных, то $x(t)$ дифференцируема и удовлетворяет уравнениям Лагранжа. Так как $x(t) \in \bar{U}_\varepsilon^-$ при всех $t > 0$, то $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

3. Пусть сначала критическая точка $x = 0$ изолирована. Многочлен $u(x)$ — квазиоднородная функция степени $s \in \mathbf{N}$ с показателями $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{N}$, если при любом $\lambda \in \mathbf{R}$ имеем $u(\lambda^{\alpha_1}x_1, \ldots, \lambda^{\alpha_n}x_n) = \lambda^s u(x_1, \ldots, x_n)$. В случае А) можно положить $v(x) = Dx$, где $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Функция $u(x)$ полуквазиоднородна, если $u = u_0 + u_1$, где u_0 — квазиоднородная функция степени s с изолированной особенностью, а $u_1 = o(|x|_*^s)$, $|x|_* = \Sigma |x_i|^{1/\alpha_i}$ — «квазиоднородная» норма в $\mathbf{R}^n$. В случае Б) поле $v(x)$ является некоторым возмущением поля Dx (см. [1]). В случае В) векторное поле v построено в работе В. П. Паламодова [2] (в предположении, что $K(x) \equiv E$; в работе [3] предложен прием, позволяющий обойти эту трудность). Оно, правда, не везде дифференцируемо, однако это не влияет на существование асимптотического решения. Если в случае А) критическая точка $x = 0$ не изолирована, то наличие асимптотического решения можно доказать следующим образом. Рассмотрим функцию $f(t) = \langle Dz(t), \dot{z}(t) \rangle$, где $z(t)$ — решение с нулевым запасом полной энергии. Можно показать, что при малых ε в области $\bar{U}_\varepsilon^-$ справедлива оценка $\dot{f} \geqslant -c_2 u$, $c_2 > 0$. Применяя рассуждения п. 2, получим «предельное» решение $x(t)$ такое, что $x(t) \in \bar{U}_\varepsilon^-$ при достаточно больших t и замыкание траектории $x(t)$ содержит точку $x = 0$. Очевидно равенство $2f = \dot{g}\, \Sigma \alpha_m x_m^2$, где $g = \ln \Sigma \alpha_m x_m^2$. Вдоль решения $x(t)$ функция $f(t) < 0$. Значит, функция $g(t)$ монотонно убывает, принимая при этом сколь угодно большие отрицательные значения. Следовательно, $g(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$ и поэтому $x(t) \to 0$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В. В.*— УМН, 1981, т. 36, № 3, с. 215—216. **2.** *Паламодов В. П* — Функц. анализ, 1977, т. 11, № 4, с. 42—55. **3.** *Козлов В. В.*— УМН, 1981, т. 36, № 1, с. 209—210.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию 23 ноября 1981 г.