ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1982

ТОМ 266 № 6

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

УДК 517.9+531.38 МАТЕМАТИКА

В.В. КОЗЛОВ, Д.А. ОНИЩЕНКО

НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА

(Представлено академиком С.П. Новиковым 22 III 1982)

1°. Движение твердого тела в идеальной жидкости описывается уравнениями Кирхгофа в $R^6 = R^3\{M\} \times R^3\{e\}$:

$$(1)\qquad \dot{M} = M \times \frac{\partial H}{\partial M} + e \times \frac{\partial H}{\partial e}, \qquad \dot{e} = e \times \frac{\partial H}{\partial M},$$

где $H = \langle AM, M\rangle/2 + \langle BM, e\rangle + \langle Ce, e\rangle/2$ — положительно-определенная квадратичная форма (см. [1, 2]). Матрицы A, B, C симметричны; без ущерба общности можно считать, что $A = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, a_3)$. Таким образом, в общем случае эта задача содержит 15 параметров. Если твердое тело имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии (как, например, трехосный эллипсоид), то $B = 0$, а $C = \mathrm{diag}\,(c_1, c_2, c_3)$.

Уравнения (1) имеют три первых интеграла $F_1 = H$, $F_2 = \langle M, e\rangle$, $F_3 = \langle e, e\rangle$. Интегральные уровни $I_{2\,3} = \{F_2 = f_2,\ F_3 = f_3 > 0\} \subset R^6$ диффеоморфны (ко)касательному расслоению двумерной сферы.

Введем в R^6 скобку Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$, полагая

$$(2)\qquad \{M_1, M_2\} = -M_3, \ldots, \{M_1, e_1\} = 0, \qquad \{M_1, e_2\} = -e_3,$$
$$\{M_1, e_3\} = e_2, \ldots, \{e_i, e_j\} = 0.$$

Считая операцию $\{\cdot, \cdot\}$ билинейной, кососимметричной и подчиняющейся правилу Лейбница, по этим формулам можно вычислить скобку Пуассона любых двух гладких функций, заданных в R^6. Легко проверить справедливость тождества Якоби. Используя скобку Пуассона, уравнения Кирхгофа можно представить в гамильтоновом виде:

$$(3)\qquad \dot{M}_s = \{H, M_s\}, \qquad \dot{e}_s = \{H, e_s\}; \qquad 1 \leqslant s \leqslant 3.$$

Скобка Пуассона (2) вырождена во всем R^6: любая гладкая функция коммутирует с интегралами F_2 и F_3. Поэтому ее можно сузить на интегральные поверхности $I_{2\,3}$, где она будет уже невырожденной. Тем самым $I_{2\,3}$ превращается в симплектическое многообразие и уравнения Кирхгофа (3) на $I_{2\,3}$ будут гамильтоновыми с функцией Гамильтона H, суженной на $I_{2\,3}$. Этот факт отмечен впервые в работе [3] (см. также [4]).

Таким образом, если уравнения Кирхгофа имеют четвертый интеграл, не зависящий от классических, то согласно теореме Лиувилля они будут вполне интегрируемыми на инвариантных многообразиях I_{23}. Отметим, что фазовый поток уравнений Кирхгофа сохраняет "стандартную" меру в R^6. Поэтому их интегрируемость при наличии дополнительного интеграла можно вывести также из теоремы Якоби о "последнем множителе" [5].

В работах Кирхгофа, Клебша, Стеклова, Ляпунова и др. авторов найден ряд интегрируемых случаев (см. [1, 2]). Перечислены все случаи, когда четвертый интеграл, как и функции F_s, является квадратичной формой. Мы исследуем вопрос о существовании дополнительного аналитического интеграла.

2°. Теорема. *Пусть среди чисел a_1, a_2, a_3 нет равных. Если уравнения Кирхгофа имеют дополнительный интеграл, не зависящий от функций F_1, F_2, F_3 и аналитический в R^6, то матрица $B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3)$ и*

$$(4) \qquad a_1^{-1}(b_2 - b_3) + a_2^{-1}(b_3 - b_1) + a_3^{-1}(b_1 - b_2) = 0.$$

Если $B = 0$, то независимый аналитический интеграл существует лишь в случае, когда $C = \operatorname{diag}(c_1, c_2, c_3)$ и

$$(5) \qquad a_1^{-1}(c_2 - c_3) + a_2^{-1}(c_3 - c_1) + a_3^{-1}(c_1 - c_2) = 0.$$

Матрица B в интегрируемом случае Стеклова определяется как раз условием (4). Условие (5) дает интегрируемый случай Клебша. Интересно отметить совпадение вида условий (4) и (5).

Следствие. *В общем случае уравнения Кирхгофа не интегрируемы по Лиувиллю.*

Доказательство теоремы основано на явлении расщепления сепаратрис, которое впервые было рассмотрено Пуанкаре в связи с задачами небесной механики [6]. Введем в уравнения Кирхгофа (1) малый параметр ϵ, заменяя e на ϵe. На фиксированном интегральном уровне $I_{23} = \{F_2 = f_2, F_3 = f_3 > 0\}$ уравнения (1) будут гамильтоновыми с функцией Гамильтона $H_0 + \epsilon H_1 + \epsilon^2 H_2$, где H_0, H_1, H_2 – сужение функций $\langle AM, M\rangle/2$, $\langle BM, e\rangle$ и $\langle Ce, e\rangle/2$ на I_{23}. Математически это эквивалентно случаю, когда постоянная энергии f_1 много больше f_2 и f_3. При $\epsilon = 0$ будем иметь интегрируемую задачу Эйлера о движении свободного твердого тела по инерции. В этой задаче на всех некритических трехмерных уровнях $I_{123} = \{F_1 = f_1 > 0, F_2 = f_2, F_3 = f_3 > 0\}$ существуют два неустойчивых периодических решения: если $a_1 < a_2 < a_3$, то

$$(6) \qquad \begin{aligned} &M_1 = M_3 = 0, \quad M_2 = M_2^0 = \pm\sqrt{2f_1/a_2}, \quad e_2 = e_2^0 = \pm f_2/M_2^0, \\ &e_1 = \alpha\cos(a_2 M_2^0)t, \quad e_3 = \alpha\sin(a_2 M_2^0)t; \quad \alpha^2 = f_3 - (f_2/M_2^0)^2. \end{aligned}$$

Из неравенства $\langle M, e\rangle^2 \leqslant \langle M, M\rangle\langle e, e\rangle$ и независимости функций F_1, F_2, F_3 на I_{123} вытекает, что $\alpha^2 > 0$. Устойчивые и неустойчивые асимптотические поверхности (сепаратрисы) периодических решений (6) можно представить как пересечения многообразия I_{123} гиперплоскостями $M_1\sqrt{a_2 - a_1} \pm M_3\sqrt{a_3 - a_2} = 0$. В невозмущенной задаче сепаратрисы "сдвоены": они сплошь заполнены двоякоасимптотическими траекториями, которые при $t \to \pm\infty$ неограниченно приближаются к периодическим траекториям (6).

Лемма. *Пусть F_0 – аналитический интеграл задачи Эйлера. Если несобственный интеграл*

$$(7) \qquad J = \int_{-\infty}^{\infty} \{F_0, H_1\}\, dt,$$

вычисленный вдоль асимптотических решений невозмущенной задачи, не постоянен на сепаратрисах задачи Эйлера, то при малых $|\epsilon| \neq 0$ уравнения Кирхгофа не имеют на I_{123} непостоянного аналитического интеграла.

Это утверждение, справедливое для общих гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, можно вывести из результатов работ [6–8]. Если хотя бы на одной асимптотической траектории интеграл $J \neq 0$, то при $\epsilon \neq 0$ возмущенные сепаратрисы расщепляются (перестают быть "сдвоенными"). Если при этом они пересекаются, то доказательство неинтегрируемости сильно упрощается (см. [7]).

Доказательство теоремы, таким образом, сводится к проверке непостоянства интеграла (7), в котором удобно положить $F_0 = \langle M, M\rangle/2$. Когда матрица $B = 0$, то в формуле (7) вместо H_1 следует взять, конечно, H_2. Если $F_0 = \langle M, M\rangle/2$, то интеграл J будет существовать лишь в смысле главного значения. В этом случае можно положить, например, $F_0 = (\langle M, M\rangle - a_2^{-1}\langle AM, M\rangle)/2$.

3°. В качестве примера мы получим условие Клебша (5) в наиболее простом случае, когда $B = 0$, а матрица C диагональна. Если $F_0 = (\langle M, M\rangle - a_2^{-1}\langle AM, M\rangle)/2$, то

$$\{F_0, H_2\} = M_1 e_2 e_3 (c_3 - c_2)(1 - a_1/a_2) + M_3 e_1 e_2 (c_2 - c_1)(1 - a_3/a_2).$$

Следовательно,

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \{F_0, H_2\}\, dt = J_1 (c_3 - c_2)(a_1^{-1} - a_2^{-1}) + J_3 (c_2 - c_1)(a_3^{-1} - a_2^{-1}),$$

где

$$J_1 = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} M_1 e_2 e_3\, dt, \qquad J_3 = a_3 \int_{-\infty}^{\infty} M_3 e_1 e_2\, dt.$$

Докажем, что $J_1 = J_3$. Для этого умножим уравнение Кирхгофа $\dot e_2 = a_1 M_1 e_3 - a_3 M_3 e_1$ на e_2 и проинтегрируем вдоль прямой $R\{t\}$. Тогда

$$J_1 - J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e_2 \dot e_2\, dt = \frac{e_2^2}{2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Вычислив интеграл J_1 (J_3) с помощью вычетов, можно убедиться в том, что он отличен от нуля. Если не выполнено условие (5), то в силу очевидного равенства

$$J/J_1 = (c_3 - c_2) a_1^{-1} + (c_1 - c_3) a_2^{-1} + (c_2 - c_1) a_3^{-1}$$

интеграл $J \neq 0$ и, следовательно, возмущенные сепаратрисы расщепляются. Из соображений симметрии и сохранения некоторой меры на I_{123} вытекает пересечение сепаратрис. Отсюда следует, что уравнения Кирхгофа неинтегрируемы на инвариантных многообразиях I_{123} и, в частности, во всем фазовом пространстве R^6.

4°. Если не выполнено условие (4) (или (5), если $B = 0$), то согласно лемме п. 2 одна из пар сепаратрис задачи Эйлера обязательно расщепляется при добавлении возмущения. Интересно отметить, что при подходящем выборе матриц B и C одна пара сепаратрис остается сдвоенной, а другая – расщепляется. Пусть, например, $B = 0$, а элементы c_{ij} симметричной матрицы C удовлетворяют следующим условиям: $c_{12} = c_{23} = 0$,

$$\sqrt{a_2 - a_1}\, c_{13} \pm \sqrt{a_3 - a_2}\,(c_{22} - c_{11}) = 0, \quad \sqrt{a_2 - a_1}\,(c_{33} - c_{22}) \mp \sqrt{a_3 - a_2}\, c_{13} = 0.$$

Тогда при всех значениях ϵ уравнения Кирхгофа имеют "частный" интеграл $F = M_1\sqrt{a_2 - a_1} \pm M_3\sqrt{a_3 - a_2}$ ($\dot F = 0$, когда $F = 0$). Можно показать, что при малых значениях $\epsilon \neq 0$ сепаратрисы задачи Эйлера $\{F = 0\} \cap I_{123}$ останутся сепаратрисами возмущенных периодических решений (6) (ср. с [9]).

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
6 IV 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ламб Г.* Гидромеханика. М.: Гостехиздат, 1947. 2. *Steklov V.* – Math.Ann., 1893, vol. 42. 3. *Новиков С.П., Шмельцер И.* – Функц. анализ и его прилож., 1981, т. 15, вып. 3. 4. *Козлов В.В.* – Вестн. МГУ, 1981, № 4. 5. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 6. *Пуанкаре А.* Избр.тр. М.: Наука, 1972, т. 2. 7. *Cushman R.* – Trans.Amer.Math.Soc., 1978, vol. 238. 8. *Зиглин С.Л.* Тр. ММО, 1980, т. 41. 9. *Козлов В.В.* – Вестн. МГУ, 1976, № 6.