Прикладная математика и механика. Том 46, вып. 4, 1982

УДК 531.01

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Козлов В. В.

Рассматриваются движения натуральных механических систем, стремящиеся к положениям равновесия при неограниченном возрастании времени. Постановка задачи и первые результаты о существовании асимптотических движений восходят, по-видимому, к работам Кнезера, где исследованы асимптотические траектории консервативных систем в окрестности невырожденных положений равновесия, в которых потенциальная энергия имеет локальный максимум [1]. Результаты Кнезера были обобщены [2] на случай вырожденных равновесий неавтономных механических систем. Асимптотические решения в общем невырожденном случае (когда гессиан потенциальной энергии в положении равновесия отличен от нуля) изучены Болем [3]. Из общей теоремы п. 2 вытекает, в частности, существование асимптотических движений в вырожденных случаях, когда разложение силовой функции в окрестности положения равновесия начинается с членов нечетного порядка. Так как уравнения движения натуральных систем обратимы, то соответствующие состояния равновесия неустойчивы.

1. Уравнения движения. Рассмотрим натуральную механическую систему с n степенями свободы. Пусть $x \in R^n$ — ее обобщенные координаты, $T = \langle K(x)x^\cdot, x^\cdot\rangle/2$ — кинетическая энергия ($\langle,\rangle$ — скалярное произведение в R^n), а $F(x)$ — обобщенные силы, действующие на эту систему. Уравнения движения имеют вид уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x^\cdot} - \frac{\partial T}{\partial x} = F(x)$$

Так как $\det K \neq 0$, то эти уравнения можно разрешить относительно ускорений

$$x^{\cdot\cdot} = \langle\Gamma(x)x^\cdot, x^\cdot\rangle + f(x), \quad f(x) = K^{-1}(x)\, F(x)$$

где $\langle\Gamma x^\cdot, x^\cdot\rangle$ — набор n квадратичных форм относительно скоростей (коэффициенты этих форм, как известно, — символы Кристоффеля римановой метрики $\langle K(x)\,dx, dx\rangle$).

Особые точки векторного поля $f(x)$ и только они являются положениями равновесия. Без ущерба для общности можно считать, что одно из равновесий — точка $x = 0$ ($f(0) = 0$). Предполагаем также, что элементы матрицы $K(x)$ и вектор-функции $F(x)$ аналитичны в некоторой окрестности точки $0 \in R^n$ (функции $\Gamma(x)$ и $f(x)$ также, очевидно, аналитичны в этой окрестности).

Разложим вектор-функцию $f(x)$ в сходящийся степенной ряд $f(x) = f_m(x) + f_{m+1}(x) + \ldots$. Здесь $f_p(x)$ — однородная вектор-функция степени p: $f_p(\lambda x) = \lambda^p f_p(x)$. Будем считать, что $m \geqslant 2$ (в частности, положение равновесия $x = 0$ вырождено).

1. Теорема об асимптотических движениях. Сначала исследуем асимптотические решения системы уравнений $x^{\cdot\cdot} = f_m(x)$ ($m \geqslant 2$), которую назовем упрощенной.

Лемма. Если при некотором $e \in R^n(|e| = 1)$ оказывается, что $f_m(e) = \varkappa e$, $\varkappa > 0$, то упрощенное уравнение имеет асимптотическое решение

$$x(t) = \frac{a}{t^{2/(m-1)}}, \quad a \in R^n, \quad a = |a|e$$

Условие леммы означает, что сила $f_m(x)$ является центральной и отталкивающей вдоль луча, определяемого вектором e. Это условие в дальнейшем предполагается выполненным. Если сила $f_m(x)$ потенциальна и *в положении равновесия ее силовая функция не имеет локального максимума*, то $f_m(e) = \varkappa e$ при некоторых $e \in R^n$ и $\varkappa > 0$.

Доказательство. Если $x = a/t^{2/(m-1)}$, то

$$x^{\cdot\cdot} = \frac{2(m+1)a}{(m-1)^2 t^{2m/(m-1)}}$$

С другой стороны

$$f_m\left(\frac{|a|e}{t^{2/(m-1)}}\right) = \frac{|a|^m}{t^{2m/(m-1)}} f_m(e) = \frac{|a|^m \varkappa e}{t^{2m/(m-1)}}$$

Следовательно, $|a|^{m-1}\varkappa = 2(m+1)/(m-1)^2$. Поскольку $\varkappa > 0$, то вектор $a \in R^n$ существует.

Асимптотические решения полной системы

$$\text{(2.1)} \qquad x^{\cdot\cdot} = \langle \Gamma(x)\, x^{\cdot},\ x^{\cdot} \rangle + f_m(x) + f_{m+1}(x) + \ldots$$

$$\Gamma(x) = \Gamma_0(x) + \Gamma_1(x) + \ldots,\quad \Gamma_0(x) = \Gamma_0(0) = \text{const}$$

будем искать в следующем виде:

$$\text{(2.2)} \qquad x(t) = \frac{a_1}{t^\mu} + \ldots + \frac{a_k}{t^{k\mu}} + \ldots;\quad a_k \in R^n,\quad a_1 = a,\quad \mu = \frac{2}{m-1}$$

В дальнейшем важную роль играет постоянная матрица размера $n \times n$

$$A = t^2 \frac{\partial f_m}{\partial x}\bigg|_{x=a/t^\mu}$$

Теорема 1. Если среди собственных значений матрицы A нет чисел

$$\text{(2.3)} \qquad \frac{4(m+3)}{(m-1)^2},\quad \frac{6(m+5)}{(m-1)^2}, \ldots, \frac{2k(2k+m-1)}{(m-1)^2}, \ldots$$

то существует единственное решение уравнения (2.1), представимое в виде ряда (2.2), сходящегося при достаточно больших значениях $|t|$.

Следствие 1. Если выполнены условия леммы и теоремы 1, то уравнения движения имеют асимптотические решения — функции $x(t)$, стремящиеся к нулю при $t \to \pm\infty$.

Следствие 2. В указанных предположениях положение равновесия $x = 0$ неустойчиво.

Доказательство теоремы 1. В уравнении движения (2.1) сделаем замены времени $t \to \tau$ и независимой переменной $x \to y$ по формулам $\tau = \varepsilon t$ и $x = \varepsilon^\mu y$ ($\mu = 2/(m-1)$). Тогда это уравнение примет следующий вид:

$$y'' - f_m(y) = \varepsilon^\mu [\langle \Gamma(\varepsilon^\mu y) y',\ y' \rangle + f_{m+1}(y) + \varepsilon^\mu f_{m+2}(y) + \ldots]$$

Здесь штрих означает производную по новому «времени» τ, в квадратных скобках заключена вектор-функция, аналитическая по y, y' и ε^μ.

Положим $\varepsilon^\mu = \delta$ и рассмотрим уравнение $F(y'(\tau), \delta) = 0$, где

$$F = y' - \int \{f_m(\textstyle\int y' d\tau) + \delta[\ldots]\}\, d\tau$$

а $\int \{\cdot\}\, d\tau$ — линейный оператор формального интегрирования степенных рядов

$$\int \sum_{\lambda_n > 1} \frac{x_n}{\tau^{\lambda_n}}\, d\tau = \sum_{\lambda_n > 1} \frac{x_n}{(1-\lambda_n)\tau^{\lambda_n - 1}}$$

Введем пространство B_r функций $x(\tau)$, представимых в виде рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\tau^{k\mu+1}},\quad x_k \in R^n$$

сходящихся при $|\tau| > r$, $\tau \in C$ и непрерывных при $|\tau| \geqslant r$. Это пространство с нормой

$$\|x(\tau)\| = \max_{|\tau|=r} |x(\tau)|$$

является банаховым. При малых δ, $\|x(\tau) - y_0'(\tau)\|$ $(y_0 = a/\tau^{\mu})$ и достаточно больших $|\tau|$ функция $F(x(\tau), \delta)$ (как функция $\tau \in C$) принадлежит B_r.

Справедливы следующие утверждения.

1°. Функция $F(x(\tau), \delta)$ — непрерывное отображение $U \times (-\varkappa, \varkappa) \to B_r$, где $\varkappa > 0$ мало, а U — некоторая достаточно малая окрестность точки $x_0 = y_0' = -\mu a/\tau^{\mu+1}$ в пространстве B_r.

2°. Уравнение $F(x_0, 0) = 0$ имеет решение $x_0 = y_0'$.

3°. *Производная* $F_x'(x, \delta)$ *отображения* F существует в $U \times (-\varkappa, \varkappa)$ и непрерывна (по крайней мере) в точке $(x, \delta) = (y_0', 0)$.

4°. Положим $x = y_0'(\tau) + z(\tau)$, $\delta = 0$. Тогда

$$F_x'(y_0', 0) = z - \int \left\{ \frac{\partial f_{n1}}{\partial y} \bigg|_{y_0(\tau)} \int z\, d\tau \right\} d\tau = z - \int \frac{A}{\tau^2} \left(\int z\, d\tau \right) d\tau$$

Покажем, что этот линейный оператор $D: B_r \to B_r$ имеет ограниченный обратный. Действительно, пусть

$$u(\tau) = \sum_{k=1} \frac{u_k}{\tau^{k\mu+1}} \in B_r$$

Тогда уравнение

$$z - \int \frac{A}{\tau^2} \left(\int z\, d\tau \right) d\tau = u$$

имеет решение

$$z(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\tau^{k\mu+1}}, \quad z_k = C_k u_k, \quad C_k = \left\| E - \frac{(m-1)^2}{2k(2k+m-1)} A \right\|^{-1}$$

Так как $\det C_k \neq 0$ при всех k и $C_k = E + O(1/k^2)$, то оператор D^{-1} существует и ограничен.

Свойства 1°—4° отображения $F(y', \delta)$ позволяют применить теорему о неявной функции ([4], гл. X): при малых δ существует единственное решение $y'(\tau, \delta)$ уравнения $F(y'(\tau), \delta) = 0$, мало отличающееся от функции $y_0'(\tau)$. Интегрируя степенной ряд функции $y'(\tau)$ и возвращаясь к старым переменным x, t, получим асимптотическое решение $x(t)$ уравнений движения, которое можно представить сходящимся рядом (2.2).

3. Неустойчивость равновесия в потенциальном поле. Предположим, что обобщенная сила $F(x)$ потенциальна и $V(x)$ — ее силовая функция. Пусть $V(x) = V_{m+1}(x) + V_{m+2}(x) + \ldots$ $(m \geqslant 2)$, где V_p — однородная форма переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ степени $p \in N$. В нормальных координатах $x \in R^n$ матрица $K(x)$, определяющая кинетическую энергию системы, имеет вид $E + \Lambda(x)$, где E — единичная матрица, а $\Lambda(0) = 0$. Так как $f(x) = K^{-1}(x)\, F(x)$, то $f_m(x) = \partial V_{m+1}/\partial x$.

Пусть $\max_{x \in S} V_{m+1} > 0$, где S — $(n-1)$-мерная единичная сфера $\{\Sigma x_i^2 = 1\} \subset R^n$, и этот максимум достигается на некотором векторе e. Тогда $f_m(e) = \varkappa e$ и $\varkappa > 0$. Без ущерба для общности можно считать, что $e = (1, 0, \ldots, 0)$. Форму V_{m+1} можно представить в следующем виде:

$$V_{m+1} = w x_1^{m+1} + \sum_{i=2}^{n} v_i(x_1)\, x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} v_{ij}(x)\, x_i x_j, \quad w = \mathrm{const}$$

где v_i и v_{ij} — некоторые однородные функции степени m и $m-1$. Поскольку $\partial V_{m+1}/\partial x_i = 0$ $(i \geqslant 2)$, когда $x_i = 0$ $(i \geqslant 2)$, то $v_i = 0$.

Далее, функция

$$\sum_{i,\, j=2}^{n} v_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\, x_i x_j \leqslant 0$$

при малых значениях $x_2, \ldots, x_n$, если $x_1 = (1 - x_2^2 - \ldots - x_n^2)^{1/2}$.

Упрощенное уравнение

$$x^{\cdot\cdot} = f_m(x) = \partial V_{m+1}/\partial x$$

имеет решение

$$x_1 = \frac{a}{t^{\mu}}, \quad a^{m-1} = \frac{2}{w\,(m-1)^2}; \quad x_i = 0, \quad i \geqslant 2$$

Матрица $A = t^2 \partial f_m/\partial x\,|_{x(t)}$ в этом случае выглядит следующим образом:

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{2m\,(m+1)}{(m-1)^2} & 0 \;\ldots\; 0 \\ 0 & v_{22}^{*} \;\ldots\; v_{2n}^{*} \\ \vdots & \ldots\ldots \\ 0 & v_{n2}^{*} \;\ldots\; v_{nn}^{*} \end{matrix} \right\|, \quad v_{ij}^{*} = v_{ji}^{*} = t^2 v_{ij}\,(a/t^{\mu}, 0, \ldots, 0) = \mathrm{const}$$

Собственными значениями матрицы A являются собственные значения $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы $\| v_{ij}^{*} \|$, а также $\lambda_1 = 2m\,(m+1)/\,(m-1)^2$.

Выясним, принадлежат ли числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ последовательности (2.3). Пусть при некотором $k \in N$ имеет место равенство $k\,(2k + m - 1) = m\,(m+1)$. Тогда $2k^2 + (m-1)\,k - m\,(m+1) = 0$, откуда $k_1 = -m < 0$, $k_2 = (m+1)/2$. Таким образом, если разложение силовой функции $\Sigma\, V_i$ $(i \geqslant 3)$ начинается с ненулевой формы нечетной степени, то последовательность чисел (2.3) не содержит λ_1.

(*) Далее, поскольку форма $\Sigma v_{ij}\,(1, 0, \ldots, 0)\, x_i x_j \leqslant 0$, то $\Sigma\, v_{ij}^{*} x_i x_j \leqslant 0$, так как величина v_{ij}^{*} пропорциональна $v_{ij}\,(1, 0, \ldots, 0)$ с положительным коэффициентом a^{m-1}. Следовательно, все $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \leqslant 0$.

Итак, с помощью теоремы 1 доказана.

Теорема 2. Если разложение силовой функции в ряд Маклорена начинается с членов нечетной степени, то существует асимптотическое движение и, в частности, положение равновесия $x = 0$ неустойчиво.

4. Некоторые обобщения. Доказанные выше утверждения об асимптотических движениях справедливы и в более общем случае, когда вместо голономных механических систем рассматриваются неголономные системы Чаплыгина.

Действительно, уравнения движения систем Чаплыгина в «канонических» переменных $(p, q) \in R^{2n}$ имеют следующий вид [5]:

$$q^{\cdot} = \frac{\partial T}{\partial p} = K(q)\, p, \quad p^{\cdot} = -\frac{\partial T}{\partial q} + F(q) + \langle B(q)\, p,\ p \rangle \tag{4.1}$$

$$T = \frac{1}{2} \langle K(q)\, p,\ p \rangle$$

где T — кинетическая энергия, $F(q)$ — обобщенные силы, действующие на точки механической системы, а $\langle B(q)\, p, p \rangle$ — некоторый набор n форм, квадратичных по импульсам $p \in R^n$. Эти уравнения, очевидно, обратимы (вместе с решением $q(t)$, $p((t)$ они имеют решение $q(-t)$, $-p(-t)$). Из системы уравнений (4.1) можно получить уравнение второго порядка относительно q

$$q^{\cdot\cdot} = \langle \Gamma(q)\, q^{\cdot},\ q^{\cdot} \rangle + f(q)$$

где $\langle \Gamma \dot q, \dot q \rangle$ — набор n квадратичных форм по скоростям, а $f(q) = K(q)F(q)$. Подходящим линейным каноническим преобразованием можно добиться того, чтобы в новых координатах матрица $K(q) = E + \Lambda(q)$, $\Lambda(0) = 0$.

Остается заметить, что в доказательстве теоремы 1 нигде не использовалась структура коэффициентов $\Gamma(q)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kneser A.* Studien uber die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslage. (Zweiter Aufsatz).— J. reine und angew. Math., 1897, B. 11b, H. 3, S. 186—223.
2. *Болотин С. В., Козлов В. В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики.— Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1980, № 4, с. 84—89.
3. *Bohl P.* Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichts lage.— J. reine und angew. Math., 1904, B. 127, H. 3, S. 179—276.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 492 с.
5. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. М.: Наука, 1976. 495 с.

Москва

Поступила в редакцию 23.III.1981

(*) В окрестности точки e на S в качестве локальных координат можно взять $x_2, \dots, x_n$. В этих переменных

$$V = w + \frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{n} [v_{ij}(e) - w(m+1)\delta_{ij}] x_i x_j + \bar{\bar{o}}(\|x\|^2)$$

Так как в точке $e \in S$ функция V принимает максимальное значение, то

$$\sum_{2}^{n} v_{ij}(e) x_i x_j \le w(m+1) \sum x_i^2$$

Поскольку $v_{ij}^* = a^{m-1} v_{ij}(e)$ и $a > 0$, то

$$\sum_{2}^{n} v_{ij}^* x_i x_j \le a^{m-1} w(m+1) \sum x_i^2 = \frac{2(m+1)}{(m-1)^2} \sum x_i^2$$

С помощью подходящей ортогональной подстановки $x \mapsto \bar{x}$ это неравенство преобразуется к виду

$$\sum_{2}^{n} \lambda_i \bar{x}_i^2 \le \frac{2(m+1)}{(m-1)^2} \sum \bar{x}_i^2$$

Следовательно,

$$\lambda_i \le \frac{2(m+1)}{(m-1)^2}, \quad i = 2, \dots, n$$

Так как

$$2(m+1)/(m-1)^2 < 4(m+3)/(m-1)^2, \quad m \ge 2,$$

то собственные числа $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ такие не принадлежат последовательности (2.3).