ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1982

ТОМ 264 № 3

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

Доклады Академии наук СССР
1982. Том 264, № 3

УДК 531.31 МЕХАНИКА

В.В. КОЗЛОВ

УСРЕДНЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ УСТОЙЧИВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

(Представлено академиком Л.И. Седовым 27 XI 1981)

1. Средним значением функции $g(x, t)$ за время T вдоль решения $x(t, x_0)$ уравнений движения с начальным условием x_0 называется число

$$G(x_0, T) = \frac{1}{T}\int_0^T g(x(t, x_0), t)\,dt,$$

а просто средним — число $G(x_0) = \lim\limits_{T\to\infty} G(x_0, T)$, если, конечно, предел существует. Во многих практически интересных задачах с помощью эргодической теоремы Дж. Биркгофа [1, 2] можно доказать, что временное среднее определено для почти всех x_0. Однако функция $G(x_0)$ может оказаться разрывной и, более того, ее точки разрыва могут всюду плотно заполнять фазовое пространство. Рассмотрим, например, невырожденную вполне интегрируемую гамильтонову систему. Ее фазовое пространство расслоено на многомерные инвариантные торы, причем резонансные и нерезонансные торы всюду плотны. Оказывается, временное среднее любое непрерывной функции непрерывно на множестве нерезонансных торов и, вообще говоря, разрывно в точках, лежащих на резонансных торах [3].

Среднее $G(x_0)$, очевидно, постоянно на решениях уравнений движения. Если эта функция окажется непрерывно дифференцируемой, то она будет первым интегралом уравнений движения. В этом случае, как доказал А. Пуанкаре [4], на траекториях невырожденных периодических движений производная $G'_{x_0} = 0$. Ниже будет показано, что, переставляя операции усреднения по времени и дифференцирования по начальным данным, этому результату А. Пуанкаре можно придать содержательный смысл даже в тех случаях, когда $G(x_0)$ разрывна или вообще не определена.

2. Пусть имеется система дифференциальных уравнений $\dot x = f(x, t)$ периодическая по t с периодом ω.

Теорема 1. *Пусть ω-периодическое решение $x(t, x_0)$ устойчиво в линейном приближении и его мультипликаторы отличны от* 1.

Тогда для любой ω-периодической по t непрерывно дифференцируемой функции $g(x, t)$ существует

$$\lim_{T\to\infty} G'_x(x_0, T) = 0.$$

Доказательство. Производная

$$G'_x(x_0, T) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,\xi(t)\,dt,$$

где $X(t) = \partial x/\partial x_0$ — матрица монодромии уравнений в вариациях для ω-периодического решения $x(t, x_0)$, а $\xi(t) = g'_x\big|_{x(t, x_0)}$ — непрерывная периодическая вектор-функция времени. Так как $X(t+k\omega)=X(t)X^k(\omega)$, то

$$(1)\qquad G'_x(x_0, mT)=\frac{1}{mT}\int_0^T X(t)\sum_{k=0}^{m-1} X^k(\omega)\,\xi(t)\,dt.$$

Очевидно равенство $\left(\sum_{k=0}^{m-1} X^k\right)(X-E)=X^m-E$. Поскольку среди собственных чисел матрицы $X(\omega)$ нет 1, то $\det\|X-E\|\neq 0$. Следовательно, матрица $X-E$ обратима и $\sum_{k=0}^{m-1} X^k=(X^m-E)(X-E)^{-1}$. Так как тривиальное решение уравнений в вариациях для решения $x(t, x_0)$ устойчиво, то при $|\eta|\leqslant c$ для всех $m\in \mathbf{N}$ справедлива оценка $|X^m\eta|\leqslant C$, $C>0$. Значит, подынтегральная функция в формуле (1) ограничена и поэтому

$$\lim_{s\to\infty} G'_x(x_0, s)=\lim_{m\to\infty} G'_x(x_0, mT)=0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Теорема не справедлива, если среди мультипликаторов периодического решения есть 1 или это решение неустойчиво в линейном приближении.

3. Результат п. 2 с очевидными изменениями переносится на автономные системы дифференциальных уравнений $\dot x=f(x)$. Если $x(t, x_0)$ – периодическое решение, то один мультипликатор всегда равен 1. Пусть $g(x)$ – произвольная гладкая функция и снова

$$G(x_0, T)=\frac{1}{T}\int_0^T g(x(t, x_0))\,dt.$$

С помощью теоремы 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть периодическое решение $x(t, x_0)$ устойчиво в линейном приближении и все его мультипликаторы, кроме одного, отличны от* 1.

Тогда существует

$$\lim_{T\to\infty} G'_x(x_0, T)=0.$$

Если уравнения движения имеют несколько независимых интегралов $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots, F_n(x)$, то теорему 2 следует применять на многообразиях совместных уровней $M_c=\{x\colon F_k(x)=c_k,\ 1\leqslant k\leqslant n\}$.

4. В последнее время активно обсуждаются свойства движений механических систем, основанные на рассмотрении временных средних некоторых характеристик движения (см., например, [5–7]). Материал зачастую носит эмпирический характер (включая результаты численных экспериментов) и не всегда обнаруженные свойства имеют точную математическую формулировку. В работах [5, 6] было замечено, что на устойчивых резонансных движениях некоторых спутниковых систем временное среднее потенциальной энергии взаимодействия спутников мало отличается от его минимального значения. В работе [7] высказано более общее предположение, что начальные данные устойчивых периодических движений соответствуют точкам локального экстремума временного среднего некоторой функции $g(x, t)$. При этом подчеркивается, что в качестве g берется функция, имеющая смысл потенциальной энергии взаимодействия. Теоремы 1, 2 показывают, что с тем же успехом можно было интегрировать любую функцию $g(x, t)$. Если при достаточно больших значениях T в точке $x=x_0$ производная $G'_x(x_0, T)$ мала, то эта точка является "подозрительной": в ее окрестности может оказаться начальное условие устойчивого периодического движения. Фактически именно это обстоятель-

ство было замечено в ходе численного эксперимента, изложенного в работе [7]. Его обоснование, предложенное в [8], слабо связано с существом дела.

Усреднение – полезный прием при изучении периодических движений. Он применялся еще А. Пуанкаре для отыскания периодических решений гамильтоновых систем, мало отличающихся от интегрируемых. Возмущающая функция (она обычно имеет смысл некоторой потенциальной энергии) при этом усредняется вдоль периодических траекторий, на которые расслоены резонансные торы невозмущенной задачи. Оказывается, что невырожденные критические точки усредненного возмущения близки к начальным фазам периодических решений возмущенной системы. "Усреднение по Пуанкаре" следует отличать от усреднения вдоль точных решений, определенного в п. 1: периодические решения, лежащие на резонансных торах невозмущенной задачи, вырождены и поэтому результат усреднения в окрестности их траекторий зависит от выбора функции g; возмущенные периодические решения, существующие согласно теореме А. Пуанкаре, в общем случае не вырождены и поэтому для них справедливы заключения теорем 1, 2.

5. Аналогичным методом можно исследовать влияние возмущения на поведение траекторий в окрестности устойчивого периодического движения. Рассмотрим возмущенную систему дифференциальных уравнений

$$(2)\qquad \dot{x} = f(x, t) + \epsilon h(x, t, \epsilon), \qquad \epsilon \ll 1,$$

ω-периодическую по t. Решения невозмущенной системы (при $\epsilon = 0$) обозначим $x(t, x_0)$, $x(0, x_0) = x_0$. Следуя общему методу Лагранжа вариации произвольных постоянных, представим возмущенное движение в следующем "оскулирующем" виде:

$$x = x(t, y), \qquad y(t) = \sum_{i \geqslant 0} y_i(t)\epsilon^i, \qquad y_0(t) \equiv x_0.$$

Таким образом, считается, что возмущенное движение происходит по орбитам невозмущенной задачи, но они уже не являются постоянными, а "эволюционируют" по закону $x_0 = y(t)$.

Теорема 3. *Пусть точка x_0 – начальное условие ω-периодического решения, устойчивого в линейном приближении "в прошлом" (при $t \to -\infty$), мультипликаторы которого отличны от* 1.

Тогда функция $y_1(t)$ ограничена при $t \geqslant 0$.

Таким образом, в первом приближении по ϵ оскулирующие орбиты возмущенного движения вечно мало отличаются от невозмущенной периодической орбиты. Если невозмущенная система гамильтонова, то устойчивость системы в вариациях "в прошлом" эквивалентна устойчивости "в будущем". Подчеркнем, что свойство "устойчивости" невырожденных устойчивых периодических движений имеет место для возмущений произвольной природы (потенциальных, диссипативных и т.д.).

Доказательство. Функцию $x(t, y)$ можно представить в виде ряда Маклорена

$$x(t, y) = x(t, x_0) + \epsilon X(t) y_1(t) + o(\epsilon),$$

где $X(t) = \left.\dfrac{\partial x}{\partial y}\right|_{\epsilon = 0}$ – матрица монодромии ω-периодического решения $x(t, x_0)$. Уравнения движения (2) запишутся тогда следующим образом:

$$\dot{x}(t, x_0) + \epsilon \dot{X}(t) y_1(t) + \epsilon X(t) \dot{y}_1(t) = f(x(t, x_0), t) + \epsilon \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\epsilon = 0} X(t) y_1(t) +$$
$$+ \epsilon h(x(t, x_0), t, 0) + o(\epsilon).$$

Поскольку $\dot{x}(t, x_0) = f(x(t, x_0), t)$ и $\dot{X} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\epsilon = 0} X$, то $\dot{y}_1 = X^{-1} h$. Следовательно,

$$y_1(t) = y_1(0) + \int_0^t X^{-1}(t) h(t) dt.$$

Так как $h(t)$ ω-периодична и $X^{-1}(t + k\omega) = X^{-k}(\omega) X^{-1}(t)$, то

$$y_1(m\omega) = y_1(0) + \sum_{k=1}^{m-1} X^{-k}(\omega) \int_0^{\omega} X^{-1}(t) h(t) dt.$$

Тривиальное решение уравнений в вариациях устойчиво "в прошлом" и $\det \| X^{-1}(\omega) - E \| \neq 0$. Поэтому последовательность $y_1(m\omega)$, $m \in \mathbf{N}$, ограничена и, следовательно, функция $y_1(t)$ тоже ограничена при $t \geqslant 0$.

Автор благодарен Я.В. Татаринову за полезные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
4 XII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birkhoff G.D.* -- Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 1931, vol. 17, № 12. 2. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949. 3. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела, 1980. 4. *Пуанкаре А.* Избр.тр., 1971, т. 1. 5. *Roy A.E., Ovenden M.W.* -- Monthly Notics Roy.Astron.Soc., 1955, vol. 115, № 1. 6. *Ovenden M.W., Feagin T., Graf O.* -- Celestial Mech., 1974, vol. 8, № 2. 7. *Белецкий В.В., Шляхтин А.Н.* -- ДАН, 1976, т. 231, № 4. 8. *Белецкий В.В., Касаткин Г.В.* -- ДАН, 1980, т. 251, № 1.