УДК 531.01

В. В. Козлов

ДИНАМИКА СИСТЕМ С НЕИНТЕГРИРУЕМЫМИ СВЯЗЯМИ. II*

6. **Положения равновесия.** Найдем условия, при которых уравнения движения допускают равновесное решение $q(t)=q_0=\mathrm{const}$.

Теорема 4. *Пусть связи (6) однородны и стационарны* ($<a_s(q), \dot{q}>=0, 1\leqslant s\leqslant m$), *а* $K=K_2$. *Точка* $q=q_0$ *является положением равновесия тогда и только тогда, когда* $Q(0, q_0, t)\in \mathrm{V}$ *для всех* $t\in \mathrm{R}$ *(здесь снова* $\mathrm{V}\subset \mathrm{R}^n$ — *линейные комбинации векторов* $a_1(q_0), \ldots, a_m(q_0)$).

Доказательство. Пусть для упрощения записи $q_0=0$. Вариации постоянного отображения $q:[t_1, t_2]\to\{0\}\in \mathrm{R}^n$ имеют вид $q(t, \alpha)= =\alpha\xi(t)$, причем $<a_s(0), \xi(t_1)>=0$ и $<a_s(0), \dot{\xi}(t)>=0$ $(1\leqslant s\leqslant m)$. Отсюда $<a_s(0), \xi(t)>=0$. Согласно общему уравнению (9) отображение $q(t):[t_1, t_2]\to 0$ является движением тогда и только тогда, когда для всех вариаций $\xi(t)$ выполнено равенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle Q(0, 0, t), \xi(t)\rangle\, dt=0.$$

* Настоящая статья является продолжением работы [1].

Поскольку $\xi(t)$ — произвольные функции из подпространства $\mathbf{W}$, ортогонального $\mathbf{V}$, то $Q \in \mathbf{V}$.

Заметим, что условие $Q \in \mathbf{V}$ является критерием равновесия и в неголономной механике.

7. **Принцип причинности.** Если движение механической системы однозначно определяется ее состоянием в некоторый фиксированный, скажем в начальный, момент времени, то будем говорить, что имеет место слабая детерминированность. Это свойство следует отличать от сильной детерминированности, когда движение полностью определяется состоянием системы в каждый момент времени. При наличии сильной детерминированности, когда справедлив классический принцип причинности Ньютона—Лапласа, уравнения движения всегда можно представить в следующем виде:

$$\ddot{q} = \Phi(\dot{q}, q, t). \tag{24}$$

Такой вид имеют уравнения и голономной, и неголономной механики. Уравнения связей являются при этом интегралами уравнений (24).

Согласно известной теореме существования и единственности решений с заданными начальными данными в вакономной механике имеется слабая детерминированность. Однако принцип Ньютона—Лапласа справедлив не всегда. Это обстоятельство сильно отличает вакономную механику от классической неголономной. Действительно, в примере, разобранном в пункте 5, за время $T/4$ лезвие конька повернется на прямой угол и скорость точки касания станет равной нулю. Если это состояние конька принять за начальное, то в дальнейшем будет иметь место чистое вращение без скольжения. Однако в общем случае конек движется по другому закону.

8. **Уравнения Лагранжа.** Рассмотрим теперь с несколько иной точки зрения вариационную задачу о стационарности действия

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}, q, t)\, dt \tag{25}$$

в классе допустимых кривых $q(t): [t_1, t_2] \to \mathbf{R}^n$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям $f_1(\dot{q}, q, t) = 0, \ldots, f_m(\dot{q}, q, t) = 0$ $(m < n)$.

Введя новый лагранжиан $\mathcal{L}(\dot{q}, q, t, \lambda) = L(\dot{q}, q, t) - \Sigma \lambda_i f_i(\dot{q}, q, t)$, общим методом Лагранжа сведем эту задачу к вариационной задаче без ограничений ($\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — дополнительные координаты). Если в новой задаче не принимать во внимание ограничений, то уравнения Эйлера—Лагранжа будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}. \tag{26}$$

Второе уравнение эквивалентно уравнениям связей: $f(\dot{q}, q, t) = 0$.

Хотя эти рассуждения нельзя признать строгими (подробный анализ метода множителей Лагранжа можно найти, например, в [2]), уравнения (26) в самом деле справедливы и их можно получить непосредственно из канонических уравнений (20). Действительно, пусть

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \Sigma \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}}, \quad H = \langle p, \dot{q} \rangle - L(\dot{q}, q, t)\,|_{p,q,t}.$$

Вычислим производную:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} + \left\langle p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \right\rangle = -\frac{\partial L}{\partial q} - \Sigma \lambda_i \left\langle \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}}, \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \right\rangle.$$

Так как

$$f(\dot q, q, t)|_{p,q,t} \equiv 0, \text{ то } \left\langle \frac{\partial f}{\partial \dot q} \cdot \frac{\partial \dot q}{\partial q} \right\rangle + \frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} + \Sigma \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q}.$$

Использовав уравнение Гамильтона $\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}$, получим первое уравнение системы (26):

$$\dot p = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \Sigma \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \dot q}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} - \Sigma \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q},$$

что и требовалось.

Уравнения Лагранжа вакономной механики

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{\partial L}{\partial q} + \Sigma \lambda_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_i}{\partial \dot q} - \frac{\partial f_i}{\partial q}\right) + \Sigma \dot\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \dot q}, \quad f_j = 0 \qquad (1 < j < m) \tag{27}$$

отличаются от классических неголономных уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{\partial L}{\partial q} + \Sigma \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial \dot q}, \quad f_j = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant m) \tag{28}$$

слагаемым

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_i}{\partial \dot q} - \frac{\partial f_i}{\partial q}\right). \tag{29}$$

Если сумма (29) тождественно равна нулю (в силу системы (27)), то уравнения (27) и (28) совпадают. Это условие, записанное, правда, в другом виде, содержится в работе [3].

Замечание. Задачу о минимуме функционала (25) при ограничениях $f(\dot q, q, t) = 0$ рассматривал еще Лагранж. Необходимое условие экстремума дает известный принцип максимума Понтрягина. Оказывается, что при этом экстремали задачи Лагранжа также описываются гамильтоновой системой уравнений [2]. Гамильтонов формализм общей вариационной задачи Лагранжа в последнее время интенсивно обсуждается в теоретической физике в связи с попытками квантования сложных механических систем (см., например, [4, 5]).

9. Первые интегралы. Если функция гамильтона H не зависит явно от времени, то она является, как известно, первым интегралом уравнений движения. Пусть, как обычно, $L = L_2 + L_1 + L_0$. Использовав формулу Эйлера для однородных функций, вычислим $H = \langle p, \dot q\rangle - L = L_2 - L_0 + \Sigma \lambda_i b_i$. Если связи однородны ($b_i \equiv 0$), то получим известный интеграл Пенлеве: $L_2 - L_0 = \mathrm{const}$. Так как линейная система (12) вырождена, то в общем неоднородном случае гамильтониан H «ненаблюдаем»: его нельзя представить в виде явной функции состояния системы $\dot q$, q и времени t. Заметим, что свойство наблюдаемости не зависит от интегрируемости связей.

Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений $Q(q, s)$: $\mathbb{R}^n \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, такое, что $Q(q, 0) = q$. Эти отображения пространства положений порождают линейные, зависящие, конечно, от параметра s

отображения пространства скоростей $\dot{Q}=\frac{\partial Q}{\partial q}\dot{q}$. Предположим, что функция Лагранжа $L(\dot{q},q,t)$ и уравнения связей $f_i=\langle Q_i,\dot{q}\rangle+b_i$ инвариантны относительно действия семейства преобразований. Тогда уравнения движения имеют первый интеграл

$$\mathcal{J}=\left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{q}},\ \frac{\partial Q}{\partial s}\Big|_{s=0}\right\rangle-\Sigma\lambda_i\left\langle a_i,\ \frac{\partial Q}{\partial s}\Big|_{s=0}\right\rangle=\left\langle p,\ \frac{\partial Q}{\partial s}\Big|_{s=0}\right\rangle.$$

Действительно, семейство отображений $\mathrm{R}^n\{q\}\to\mathrm{R}^n\{q\}$ можно расширить до семейства отображений $\mathrm{R}^{n+m}\{q,\lambda\}\to\mathrm{R}^{n+m}\{q,\lambda\}$, положив дополнительно $\Lambda=\lambda$. В силу предположений расширенное семейство сохраняет измененную функцию Лагранжа $\mathcal{L}=L-\Sigma\lambda_i f_i$. Хорошо известно, что в этом случае уравнения (26) имеют первый интеграл

$$\mathcal{J}=\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}},\ \frac{\partial Q}{\partial s}\Big|_{s=0}\right\rangle+\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}},\ \frac{\partial \Lambda}{\partial s}\Big|_{s=0}\right\rangle=\left\langle p,\ \frac{\partial Q}{\partial s}\Big|_{s=0}\right\rangle.$$

Функция $\mathcal{J}$, вообще говоря, ненаблюдаема. Если, однако, векторы $\frac{\partial Q}{\partial s}$ являются «возможными скоростями»:

$$\left\langle a_i,\ \frac{\partial Q}{\partial s}\Big|_{s=0}\right\rangle=0,\qquad 1\leqslant i\leqslant m, \tag{30}$$

то интеграл $\mathcal{J}$ наблюдаем и имеет вид, хорошо известный в классической механике:

$$\mathcal{J}=\left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{q}},\ \frac{\partial Q}{\partial s}\Big|_{s=0}\right\rangle. \tag{31}$$

Эти выводы полезно сравнить со следующим свойством уравнений неголономной динамики [6]: если существует семейство преобразований, сохраняющее лагранжиан и удовлетворяющее условию (30), то уравнения движения имеют линейный интеграл (31).

10. **Уравнения Пуанкаре.** Запишем уравнения Лагранжа (26) в переменных q, ω, где «квазискорости» ω определяются из уравнений

$$\dot{q}_i=\sum_j a_{ij}(q)\,\omega_j,\quad \det\|a_{ij}\|\neq 0.$$

В новых координатах функция Лагранжа: $L=L^*(\omega,q,t)$, а уравнения связей: $f_i=f^*_i(\omega,q,t)=0$ $(1\leqslant i\leqslant m)$. Введем «измененную» функцию Лагранжа $\mathcal{L}^*(\omega,q,t,\lambda)=L^*-\Sigma\lambda_i f^*_i$, где λ_i — дополнительные координаты. Пусть

$$X_k=\sum_i a_{ik}(q)\frac{\partial}{\partial q_i},\qquad 1\leqslant k\leqslant n, \tag{32}$$

суть независимые линейные дифференциальные операторы; их коммутаторы $[X_\alpha,X_\beta]$ — линейные комбинации $\sum_\gamma c^\gamma_{\alpha\beta}(q)X_\gamma$. Если линейные комбинации операторов (32) образуют алгебру Ли относительно операции $[\cdot,\cdot]$, то $c^\gamma_{\alpha\beta}=\mathrm{const}$. Удобно ввести дополнительные операторы $X_{n+i}=\frac{\partial}{\partial\lambda_i}$ $(1\leqslant i\leqslant m)$, коммутирующие с операторами (32).

Общим методом множителей Лагранжа (см. пункт 8) можно представить расширенную систему уравнений (26) в виде уравнений Пуанкаре [7, 8]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \omega_i}+\sum_{\alpha,\beta} c^i_{\alpha\beta}\omega_\alpha \frac{\partial \mathscr{L}^*}{\partial \omega_\beta}=X_i(\mathscr{L}^*), \qquad 1\leqslant i\leqslant m+n. \tag{33}$$

Так как функция $\mathscr{L}^*$ не зависит от квазискоростей $\omega_{n+1}, \ldots, \omega_{n+m}$ и операторы $X_1, \ldots, X_n$ и $X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}$ коммутируют, то последние m уравнений (33) приводятся к уравнениям связей $f_1=\ldots=f_m=0$.

11. Оптико-механическая аналогия. Рассмотрим задачу о распространении света в среде, которая в общем случае неоднородна и неизотропна. Свойства среды можно описать, задав в каждой точке $x\in\mathbb{R}^3$ индикатрису — поверхность $\langle A(x)\dot x, \dot x\rangle=1$, являющуюся геометрическим местом возможных скоростей света в точке x. Согласно экстремальному принципу Ферма свет распространяется из точки x_1 в точку x_2 за кратчайшее время:

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} dt=0. \tag{34}$$

Будем менять свойства среды, изменяя следующим образом уравнение индикатрисы:

$$\langle A(x)\dot x, \dot x\rangle+\mu(\langle a(x), \dot x\rangle)^2=1,$$

где $a(x)$ — некоторое векторное поле в $\mathbb{R}^3$, а $\mu>0$ — параметр. При $\mu\to\infty$ индикатрисы станут «плоскими»: $\langle a(x), \dot x\rangle=0$. Это уравнение можно рассматривать как связь (интегрируемую или неинтегрируемую), которая ограничивает положение вектора скорости света $\dot x$. При каждом фиксированном значении параметра $\mu>0$ распространение света подчиняется принципу Ферма (34). Поэтому в предельной задаче (когда "$\mu=\infty$") при определении закона распространения света также естественно исходить из вариационного принципа (34). При этом из-за наличия связи $\langle a(x), \dot x\rangle=0$ определение вариаций следует модифицировать так же, как в пункте 1. Далее покажем, что в похожей ситуации экстремали задачи (34) при $\mu\to\infty$ будут стремиться к экстремалям предельной вариационной задачи.

12. Предельный переход. Пусть $K=\langle A(q,t)\dot q, \dot q\rangle/2$, $\mathscr{U}=\mathscr{U}(q,t)$. Рассмотрим семейство голономных систем с лагранжианами $L=K+\mu(\langle a(q,t), \dot q\rangle)^2-\mathscr{U}(q,t)$, где $\mu>0$ — параметр, $a(q,t)$ — некоторое векторное поле, удовлетворяющее уравнению

$$\langle A^{-1}a, a\rangle=1. \tag{35}$$

Из равенства (35) следует, что $|a|$ отделена от нуля. Поэтому при $\mu\to\infty$ скалярное произведение $\langle a, \dot q\rangle$ (но не норма $|a|$) будет стремиться к нулю.

Теорема 5. *Пусть $q(t,\mu)$ — движение голономной системы с лагранжианом L, начальные условия которого $q(0,\mu)=q_0$, $\dot q(0,\mu)=\dot q_0$ удовлетворяют уравнению $\langle a(q_0,0), \dot q_0\rangle=0$. Тогда на каждом конечном интервале времени существует предел $\lim\limits_{\mu\to\infty} q(t,\mu)=q^*(t)$, где $q^*(t)$ — движение вакономной системы с лагранжианом $L=\langle A\dot q, \dot q\rangle/2-\mathscr{U}$, на которую наложена связь $\langle a, \dot q\rangle=0$, и $q^*(0)=q_0$, $\dot q^*(0)=\dot q_0$.*

Доказательство. При $\mu>0$ введем канонические импульсы:

$$p=A\dot q+\mu\langle a, \dot q\rangle a. \tag{36}$$

Используя равенство (35), уравнение (36) можно разрешить относительно скоростей $\dot{q}$:

$$A\dot{q} = p - \langle A^{-1}p, a\rangle a + \frac{1}{\mu+1}\langle A^{-1}p, a\rangle a.$$

Заметим, что при $\mu\to\infty$ полученное соотношение переходит в равенство

$$p = A\dot{q} + \frac{\langle A^{-1}p, a\rangle}{\langle A^{-1}a, a\rangle}a, \tag{37}$$

с помощью которого вводятся «вакономные» импульсы. Следовательно, гамильтониан H голономной системы можно представить в виде суммы $H^*+O(\mu^{-1})$, где H^* — «вакономный» гамильтониан. Так как согласно предположению $\langle a(q_0, 0), \dot{q}_0\rangle = 0$, то при всех μ будем иметь $p(0) = p_0 = A(q_0, 0)\dot{q}_0$ (см. (36)). Начальные импульсы вакономной динамики, согласно теореме 2, выбираются из условия $\lambda = \langle A^{-1}p^*_0, a\rangle = 0$. Использовав равенство (37), получим, что $p^*_0 = A(q_0, 0)\dot{q}_0 = p_0$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться известной теоремой Пуанкаре: решения гамильтоновой системы с гамильтонианом $H = H^*+O(\mu^{-1})$ стремятся при $\mu\to\infty$ на конечном интервале времени к решениям системы с предельным гамильтонианом, имеющим те же самые начальные данные.

13. **Задача Г. К. Суслова.** Рассмотрим вращение твердого тела с неподвижной точкой, которое удовлетворяет неинтегрируемой связи: проекция угловой скорости на некоторую неподвижную в теле ось равна нулю. Эту задачу с точки зрения неголономной механики впервые рассмотрел Г. К. Суслов [9]. Мы исследуем ее вакономный вариант.

Выберем подвижную систему координат с началом в неподвижной точке. Пусть ω_1, ω_2, ω_3 — проекции вектора угловой скорости на подвижные координатные оси. Будем считать (как в классическом случае Г. К. Суслова), что на тело не действуют внешние силы. Функция Лагранжа совпадает с кинетической энергией тела:

$$K = \frac{1}{2}(I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2 + 2I_{12}\omega_1\omega_2 + 2I_{23}\omega_2\omega_3 + 2I_{13}\omega_1\omega_3). \tag{38}$$

Без ущерба общности можно считать, что уравнение неинтегрируемой связи есть $\omega_3 = 0$.

Проекции угловой скорости ω_1, ω_2 ω_3 можно рассматривать как новые квазискорости. Как замечено Пуанкаре [7], линейные комбинации соответствующих базисных операторов X_1, X_2, X_3 образуют алгебру Ли, изоморфную $so(3)$. Их коммутаторы легко вычисляются: $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_3, X_1] = X_2$. Использовав эти формулы, уравнения (38) можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}
I_{11}\dot{\omega}_1 + I_{12}\dot{\omega}_2 + I_{13}\omega_1\omega_2 + I_{23}\omega_2^2 - \lambda\omega_2 = 0,\\
I_{12}\dot{\omega}_1 + I_{22}\dot{\omega}_2 - I_{13}\omega_1^2 - I_{23}\omega_1\omega_2 + \lambda\omega_1 = 0,\\
I_{13}\dot{\omega}_1 + I_{23}\dot{\omega}_2 - \dot{\lambda} + (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2 + I_{12}(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 0,
\end{gathered} \tag{39}$$

где λ — множитель Лагранжа. Уравнения (39) имеют первый интеграл $I_{11}\omega^2_1 + 2I_{12}\omega_1\omega_2 + I_{22}\omega^2_2$. Поскольку квадратичная форма (38) положительно определена, то $I_{11}I_{22} - I^2_{12} > 0$. Значит, систему (39) можно разрешить относительно $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$ и $\dot{\lambda}$. Нетрудно проверить, что фазовый поток этой системы уравнений сохраняет обычный объем в $R^3\{\omega_1, \omega_2, \lambda\}$. Следовательно, согласно известной теореме Якоби о последнем множителе уравнения (39) интегрируются в квадратурах. Если неподвижная в теле ось (с нулевой проекцией вектора угловой скорости) является осью инерции, то уравнения (39) просто интегрируются в эллиптических функциях времени.

Неголономные уравнения задачи Суслова ([9], пункт 298)

$$I_{11}\dot{\omega}_1+I_{23}\omega_2^2+I_{13}\omega_1\omega_2=0, \quad I_{22}\dot{\omega}_2-I_{23}\omega_1\omega_2-I_{13}\omega^2_2=0 \qquad (40)$$

значительно проще уравнений (39): их решения всегда являются элементарными функциями.

Эта задача рассмотрена здесь отчасти для того, чтобы показать возможные применения теоремы 5. Считая I_{ij} параметрами, принимающими произвольные значения, рассмотрим вращения Эйлера—Пуансо с одним и тем же начальным условием, при котором $\omega_3(0)=0$. Фиксируя значения I_{ij}, кроме I_{33}, устремим параметр I_{33} к бесконечности. Из интеграла энергии получим, что $\omega_3\to 0$. В этом случае теорема 5 утверждает следующее: решения уравнений Эйлера стремятся при $I_{33}\to\infty$ к решениям вакономных уравнений (39), а не (40). Для реальных тел в силу неравенства треугольника $I_{33}\leqslant I_{11}+I_{22}$ такой предельный переход осуществить, конечно, нельзя. Однако в более общих физических моделях, например твердое тело в идеальной жидкости, параметры I_{ij} уже не имеют простого механического смысла моментов и произведений инерции.

Приношу искреннюю благодарность Е. И. Кугушеву за многочисленные беседы, которые помогли мне по-новому взглянуть на некоторые традиционные представления классической динамики, а также С. В. Болотину и Я. В. Татаринову за внимание к работе.

V. V. Kozlov

DYNAMICS OF SYSTEMS WITH NON-INTEGRABLE RESTRICTIONS

A new mathematical model of the analytical dynamics with non-integrable restrictions is considered. Some applications are given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В. В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями. I.—Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1982, № 3, с. 92—100.
2. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М., 1974.
3. Румянцев В. В. О принципе Гамильтона для неголономных систем.—Прикл. матем. и механ., 1978, 42, вып. 3, с. 387—399.
4. Дирак П. Лекции по квантовой механике. М., 1968.
5. Березин Ф. А. Гамильтонов формализм в общей задаче Лагранжа.—Успехи матем. наук, 1974, 29, вып. 3, с. 183—184.
6. Козлов В. В., Колесников Н. Н. О теоремах динамики.—Прикл. матем. и механ., 1978, 42, вып. 1, с. 28—33.
7. Poincaré H. Sur une forme nouvelle des équations de la mechanique.—C. r. Acad. sci., 1901, 132, p. 369—371.
8. Четаев Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре.—Прикл. матем. и механ., 1941, 5, вып. 2, с. 253—262.
9. Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.—Л., 1946.

Поступила в редакцию
28.09.81