УДК 531.01

В. В. Козлов

ДИНАМИКА СИСТЕМ С НЕИНТЕГРИРУЕМЫМИ СВЯЗЯМИ. I*

Введение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек $(m_i, \mathbf{r}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ ($m_1, \ldots, m_n$ — массы точек, а $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ — их радиусы-векторы), на которые действуют силы $\mathbf{F}_i$ (зависящие от времени t и состояния системы). Пусть, как обычно, на систему наложены линейные по скоростям связи

$$a_{0j}(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^{n} \langle a_{ij}(\mathbf{r}, t), \dot{\mathbf{r}}_i \rangle = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{1}$$

где a_{ij} — некоторые известные функции ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$). Для определения движения обычно используют следующий принцип Даламбера — Лагранжа [1, 2]: набор вектор-функций $\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_n(t)$ называется движением рассматриваемой системы, если

$$\sum_{i=1}^{n} \langle m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle = 0 \tag{2}$$

для всех $\delta \mathbf{r}_i$, таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} \langle a_{ij}, \delta \mathbf{r}_i \rangle = 0. \tag{3}$$

«Вариации» $\delta \mathbf{r}$ можно рассматривать как функции времени, удовлетворяющие уравнениям (3), где $a_{ij}(t) = a_{ij}(\mathbf{r}(t), t)$. При этом «варьированное» движение $\mathbf{r}(t) + \delta \mathbf{r}(t)$ удовлетворяет уравнениям связей (1), вообще говоря, только в случае, когда уравнения (1) интегрируемы (си-

---

* **Окончание — в следующем номере журнала.**

стема голономна). Если связи (1) интегрируемы, то принцип Даламбера—Лагранжа эквивалентен следующему интегральному принципу:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \langle m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \delta \dot{\mathbf{r}}_i \rangle \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \langle \mathbf{F}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle \, dt \tag{4}$$

для всех вариаций $\delta \mathbf{r}(t)$ с закрепленными концами ($\delta \mathbf{r}(t_1) = \delta \mathbf{r}(t_2) = 0$). Для потенциальных сил уравнение (4) можно представить в виде принципа стационарности действия (принцип Гамильтона):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \tag{5}$$

где функция Лагранжа L — разность кинетической и потенциальной энергий системы.

Желание представить уравнение движения (2) для неинтегрируемых связей (1) в форме (4), (5) породило множество работ, благодаря которым стало ясно, что это можно сделать лишь в исключительных случаях (исчерпывающий анализ задачи содержится в [3, 4]). Родственная задача о представлении уравнений неголономной механики в гамильтоновой форме для общего случая тоже неразрешима [5].

В настоящей работе использовано другое определение вариаций, при котором варьированные движения удовлетворяют уравнениям связей. Движения механической системы определены с помощью некоторого интегрального принципа, аналогичного уравнению (4). Оказалось, что при этом уравнения движения всегда можно представить в гамильтоновом виде. В голономном случае этот подход совпадает с классическим, а в случае неинтегрируемых связей он дает уравнения движения, отличные от традиционных уравнений неголономной механики. Естественность такого подхода обосновывается теоремой о предельном переходе.

1. Вариации. Пусть в $\mathbf{R}^n\{q\}$ заданы независимые линейные связи (в общем случае неинтегрируемые):

$$f_i(\dot{q}, q, t) = \langle a_i(q, t), \dot{q} \rangle + b_i(q, t) = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad m < n \tag{6}$$

($\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$; $x, y \in \mathbf{R}^n$), и пусть $q^*(t)$: $[t_1, t_2] \to \mathbf{R}^n$ — некоторая функция, удовлетворяющая уравнениям (6).

Определение. *Вариацией кривой $q^*(t)$ называется отображение $q(t, \alpha) : [t_1, t_2] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^n$, такое, что*

1) $q(t, 0) = q^*(t)$ для всех $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$,

2) функции $q(t, \alpha)$ удовлетворяют уравнениям (6) при всех α,

3) $\left\langle a_i^*, \frac{\partial q}{\partial \alpha}\Big|_{t_1} \right\rangle = 0$ при $\alpha = 0$ (здесь $a_i^* = a_i(q^*(t_1), t_1)$).

Если связи интегрируемы, то условие 3 всегда выполнено. Это условие можно было бы усилить, положив $q(t, \alpha) = q^*(t_1)$ для всех $-\varepsilon < \alpha < \varepsilon$.

Для наших целей можно ограничиться вариациями следующего вида: $q(t, \alpha) = q^*(t) + \alpha \xi(t)$, где $\langle a^*_i, \xi(t_1) \rangle = 0$ и

$$\langle a_i(q^*(t), t), \dot{\xi}(t) \rangle + \left\langle \frac{\partial a_i}{\partial q}\Big|_{q^*(t)} \xi(t), \dot{q}^*(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial b_i}{\partial q}\Big|_{q^*(t)}, \xi(t) \right\rangle = 0. \tag{7}$$

Такие вариации удовлетворяют уравнениям связей (6) с точностью до $o(\alpha)$.

Естественно возникает вопрос: если $\xi(t_1)=0$, то насколько точно можно удовлетворить равенству $\xi(t_2)=0$?

Теорема 1. *Для всех $t\in[t_1, t_2]$ разложим $\mathbf{R}^n$ в ортогональную сумму $\mathbf{V}\oplus\mathbf{W}$, где $\mathbf{V}$ — подпространство линейных комбинаций векторов $a_1(t), \ldots, a_m(t)$. Тогда для любой функции $\zeta(t)$: $[t_1, t_2]\to\mathbf{W}$, $\zeta(t_1)=\zeta(t_2)=0$ существует вариация $\xi(t)$, такая, что $\xi(t)=\eta(t)+\zeta(t)$, $\eta(t)\in\mathbf{V}$ для всех $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ и $\eta(t_1)=0$.*

Заметим, что для интегрируемых связей $\eta(t_2)=0$, а в общем случае $\eta(t_2)$ есть линейная комбинация векторов $a_1(t_2), \ldots, a_m(t_2)$. Вариации, о которых идет речь в теореме 1, будем называть вариациями с полузакрепленными концами.

Доказательство теоремы. Рассмотрим невырожденное линейное отображение $A^*(t):\mathbf{R}^n\{x\}\to\mathbf{R}^n\{\xi\}$, такое, что $Aa_i=e_i$ ($1\leqslant i\leqslant m$; e_i — единичные векторы). Так как $\xi=A^*(t)x$, то $\dot\xi=A^*(t)\dot x+\dot A^*(t)x$. В новых переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (7) примут следующий вид:

$$\dot x_1+\sum_{k=1}^{n} c_{k,1}(t)x_k=0, \ldots, \dot x_m+\sum_{k=1}^{n} c_{k,m}(t)x_k=0. \tag{8}$$

Пусть $x_{m+1}(t), \ldots, x_n(t)$ — произвольные функции, обращающиеся в нуль на концах интервала $[t_1, t_2]$. Тогда функции $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ однозначно определятся системой уравнений (8) и начальными условиями $x_1(t_1)=\ldots=x_m(t_1)=0$. Пространство $\mathbf{W}$ размерности $n-m$ состоит из линейных комбинаций $y(t)=\Sigma x_j(t)e_j$. Поскольку

$$\langle a_i, \zeta(t)\rangle=\langle a_i, A^*y\rangle=\sum_{j>m} x_j(t)\langle a_i, A^*e_j\rangle=\sum_{j>m} x_j(t)\langle Aa_i, e_j\rangle=0,$$

то пространства $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ ортогональны и $\mathbf{R}^n=\mathbf{V}\oplus\mathbf{W}$.

2. Интегральные принципы. Предположим, что положение механической системы определяется обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$, возможно, зависимыми, и на эту систему наложены линейные связи (6). Пусть $K(\dot q, q, t)=K_2+K_1+K_0$ — кинетическая энергия системы; здесь K_i — однородная форма относительно обобщенных скоростей степени i, причем квадратичная форма K_2 положительно определена при всех значениях q и t. Обобщенные силы обозначим $Q(\dot q, q, t)$.

Определение. *Отображение $q^*(t):[t_1, t_2]\to\mathbf{R}^n$ называется движением, если для всех вариаций $q(t, \alpha)$ при $\alpha=0$*

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\left\langle\frac{\partial K}{\partial\dot q}, \frac{\partial\dot q}{\partial\alpha}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial K}{\partial q}, \frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\langle Q, \frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle dt. \tag{9}$$

Пусть силы Q потенциальны: существует такая силовая функция $V(q, t)$, что $Q=\frac{\partial V}{\partial q}$. Тогда, использовав очевидные перестановочные соотношения $\frac{\partial\dot q}{\partial\alpha}=\left(\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right)^{\cdot}$, равенство (9) можно представить в следующем виде:

$$\left\langle\frac{\partial K}{\partial\dot q}, \frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle-\frac{d}{d\alpha}\int_{t_1}^{t_2} L\,dt=0, \qquad \alpha=0. \tag{10}$$

Оказывается, если связи однородны ($b_s\equiv 0$, $1<s<m$), это определение эквивалентно обобщенному принципу стационарности действия:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \tag{11}$$

при $\alpha=0$ для всех вариаций с полузакрепленными концами. При интегрируемых связях принципы, основанные на уравнениях (9)—(11), совпадают с классическими принципами голономной механики. Если связи неинтегрируемы, то, как показано далее, уравнения (9)—(11) в общем случае не совпадают с уравнениями (2), (3) неголономной динамики. Механику, основанную на интегральных принципах (9)—(11), для краткости будем называть вакономной (от итальянского vacco — сидеть без дела)*.

3. **Вариация действия.** Рассмотрим лагранжиан $L(\dot q, q, t)$, положительно определенный по $\dot q$, и вычислим вариацию:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{t_1}^{t_2} L(\dot q, q, t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\left\langle\frac{\partial L}{\partial q}, \frac{\partial q}{\partial \alpha}\right\rangle + \left\langle\frac{\partial L}{\partial \dot q}, \frac{\partial \dot q}{\partial \alpha}\right\rangle\right)dt =$$

$$= \left\langle\frac{\partial L}{\partial \dot q}, \frac{\partial q}{\partial \alpha}\right\rangle\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\left\langle\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}, \frac{\partial q}{\partial \alpha}\right\rangle dt.$$

Введем канонические импульсы по формуле

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} - \Sigma\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial \dot q} = \frac{\partial L}{\partial \dot q} - \sum_{s=1}^{m}\lambda_s a_s, \tag{12}$$

где λ_s — пока не определенные множители. Так как $\det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^2}\right\| \neq 0$, то из уравнения (12), по крайней мере локально, можно найти функцию $\dot q = \dot q(p, q, \lambda, t)$. Подставив это соотношение в уравнения связей (6), получим уравнения для определения λ как функций от p, q, t. Покажем, что эти уравнения действительно можно разрешить относительно λ_s. Матрица Якоби:

$$\left\|\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)}\right\| = \left\|\left\langle a_j, \frac{\partial \dot q}{\partial \lambda_s}\right\rangle\right\|. \tag{13}$$

Дифференцируя тождество (12) по λ_j, получаем

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^2}\frac{\partial \dot q}{\partial \lambda_j} = a_j. \tag{14}$$

Таким образом, матрицу (13) можно представить в следующем виде:

$$\left\|\left\langle\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^2}\frac{\partial \dot q}{\partial \lambda_j}, \frac{\partial \dot q}{\partial \lambda_s}\right\rangle\right\|.$$

Поскольку форма $\left\langle\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^2}\chi, \chi\right\rangle$ положительно определена, из равенства

---

* Любезно предложено Я. В. Татариновым.

нулю определителя этой матрицы вытекает линейная зависимость векторов $\frac{\partial\dot q}{\partial\lambda_1}, \ldots, \frac{\partial\dot q}{\partial\lambda_m}$. Но это в силу формулы (14) противоречит линейной независимости векторов $a_1, \ldots, a_m$. Итак, $\lambda_s=\lambda_s(p, q, t)$. Далее,

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\langle\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q},\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\langle\frac{\partial L}{\partial q}-\dot p-\sum_s\dot\lambda_s a_s-\sum_s\lambda_s\dot a_s,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle dt. \quad (15)$$

Так как вариации $q(t, \alpha)$ удовлетворяют уравнениям связей, то

$$\left\langle\left\langle\frac{\partial a_j}{\partial q},\dot q\right\rangle,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle+\left\langle a_j,\frac{d}{dt}\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial b_j}{\partial q},\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle=0.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}\left\langle a_j,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle+\left\langle\left\langle\frac{\partial a_j}{\partial q},\dot q\right\rangle,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial b_j}{\partial q},\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle=\left\langle\dot a_j,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle.$$

Следовательно, интеграл (15) можно привести к такому виду:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\left\langle\frac{\partial L}{\partial q}-\dot p,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle-\Sigma\lambda_s\left\langle\left\langle\frac{\partial a_s}{\partial q},\dot q\right\rangle,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle-\right.$$
$$\left.-\Sigma\lambda_s\left\langle\frac{\partial b_s}{\partial q},\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle\right)dt-\Sigma\lambda_s\left\langle a_s,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Введем в рассмотрение функцию Гамильтона:

$$H(p, q, t)=\langle p,\dot q\rangle|_{p,q,t}-L(\dot q(p, q, t), q, t).$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial H}{\partial q}=\left\langle p,\frac{\partial\dot q}{\partial q}\right\rangle-\frac{\partial L}{\partial q}-\left\langle\frac{\partial L}{\partial\dot q},\frac{\partial\dot q}{\partial q}\right\rangle=-\frac{\partial L}{\partial q}-\Sigma\lambda_s\left\langle a_s,\frac{\partial\dot q}{\partial q}\right\rangle. \quad (16)$$

С учетом формулы (16) перепишем интеграл (15) так:

$$-\Sigma\lambda_s\left\langle a_s,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left\langle\frac{\partial H}{\partial q}+\dot p,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(\Sigma\lambda_s\left\langle\left\langle a_s,\frac{\partial\dot q}{\partial q}\right\rangle,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle+\Sigma\lambda_s\left\langle\left\langle\frac{\partial a_s}{\partial q},\dot q\right\rangle,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle+\Sigma\lambda_s\left\langle\frac{\partial b_s}{\partial q},\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle\right)dt.$$

Поскольку $f(\dot q, q, t)$, как функция переменных p, q, t, тождественно равна нулю, то

$$\left\langle a_s,\frac{\partial\dot q}{\partial q}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial a_s}{\partial q},\dot q\right\rangle+\frac{\partial b_s}{\partial q}\equiv 0$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=\left\langle\frac{\partial L}{\partial\dot q},\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle\Big|_{t_1}^{t_2}-\Sigma\lambda_s\left\langle a_s,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left\langle\frac{\partial H}{\partial q}+\dot p,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle dt=$$

$$=\left\langle p,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left\langle\frac{\partial H}{\partial q}+\dot p,\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right\rangle dt. \quad (17)$$

4. **Уравнение Гамильтона.** Использовав формулу (17), уравнение (9) при $\alpha=0$ для всех вариаций $q(t, \alpha)$ можно записать в следующем виде:

$$\sum_{s=1}^{m} \lambda_s(p, q, t) \left\langle a_s(q, t), \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right\rangle \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \dot{p} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q} - Q, \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right\rangle dt = 0. \quad (18)$$

Здесь $\mathcal{K} = (\langle p, \dot{q} \rangle - K(\dot{q}, q, t))|_{p,q,t}$ и $Q = Q(\dot{q}(p, q, t), q, t)$.

Теорема 2. *Отображение* $q^*: [t_1, t_2] \to \mathrm{R}^n\{q\}$ *является движением тогда и только тогда, когда существует функция* $p^*: [t_1, t_2] \to \mathrm{R}^n\{p\}$, *такая, что*

1) $\lambda_s(p^*(t_2), q^*(t_2), t_2) = 0, \qquad 1 \leqslant s \leqslant m;$

2) $\dot{q} = \dfrac{\partial \mathcal{K}}{\partial p}, \ \dot{p} = -\dfrac{\partial \mathcal{K}}{\partial p} + Q, \qquad p = p^*(t), \quad q = q^*(t).$

Доказательство. Достаточность условий 1, 2 очевидна. Докажем их необходимость. Положим $p_2^* = \dfrac{\partial K}{\partial \dot{q}}\Big|_{\dot{q}^*(t_2), q^*(t_2), t_2}$. Из равенства (12), с учетом линейной независимости векторов $a_1, \ldots, a_m$, следует, что $\lambda_s(p^*_2, q^*(t_2), t_2) = 0$, $1 \leqslant s \leqslant m$. Пусть функция $p^*(t)$ такова, что $p^*(t_2) = p^*_2$. Тогда, использовав свойство 3 вариаций $q(t, \alpha)$, легко получить равенство

$$\sum_s \lambda_s(p^*, q^*, t) \left\langle a_s(q^*, t), \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right\rangle \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Далее,

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p} = \dot{q} + \left\langle p, \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial K}{\partial \dot{q}}, \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} \right\rangle = \dot{q} + \Sigma \lambda_s \left\langle a_s, \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} \right\rangle.$$

Поскольку $\langle a_s, \dot{q} \rangle |_{p,q,t} + b_s(q, t) \equiv 0$, то $\left\langle a_s, \dfrac{\partial \dot{q}}{\partial p} \right\rangle = 0$ и, следовательно,

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p}. \quad (19)$$

Покажем, что правые части уравнений (19) инвариантны относительно m-параметрического семейства трансляций:

$$p \to p + \sum_{s=1}^{m} \mu_s a_s, \qquad \mu_s \in \mathrm{R}.$$

Для этого, очевидно, достаточно показать, что

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial p^2}, a_s \right\rangle = 0.$$

Действительно,

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p}, a_s \right\rangle = \langle a_s, \dot{q} \rangle = -b_s(q, t)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial p} \left\langle \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p}, a_s \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial p^2}, a_s \right\rangle = 0,$$

поскольку $b_s(q, t)$ от p не зависят.

Таким образом, если равенству (19) удовлетворяют функции $q=q^*(t)$ и $p=p^*(t)$, то то же самое справедливо и для функций $q=q^*(t)$ и $p=p^*(t)+\chi(t)$, где $\chi\in\mathbf{V}$ ($\mathbf{V}\subset\mathbf{R}^n$ — пространство линейных комбинаций векторов $a_1, \ldots, a_m$). Поскольку ранг системы уравнений (12) относительно переменных p равен $n-m$, то общее решение линейных уравнений (19) с граничным условием $p(t_2)=p^*_2$ можно представить в следующем виде: $p^*(t)=x(t)+y(t)$, где $x(t)$ — произвольная дифференцируемая функция, принимающая значения из подпространства $\mathbf{V}\subset\mathbf{R}^n$, с краевым условием $x(t_2)=x^*_2$, а $y(t)$ — некоторая известная функция, такая, что $y(t)\in\mathbf{W}$ и $y(t_2)=y^*_2$, $x^*_2+y^*_2=p^*_2$. Функцию $x(t)$ найдем из условия: $\dot{p}+\dfrac{\partial\mathcal{K}}{\partial q}-Q|_t$ равна нулю на подпространстве $\mathbf{V}$ (для этого надо решить систему дифференциальных уравнений относительно x с известным краевым условием. Уравнение (18) предстанет в следующем виде:

$$\int_{t_1}^{t_2}\langle z(t), \zeta(t)\rangle\, dt=0,$$

где $z(t)=\left(\dot{p}+\dfrac{\partial\mathcal{K}}{\partial q}-Q\right)\Big|_t-x(t)\in\mathbf{W}$, а $\zeta(t)\in\mathbf{W}$—произвольная функция, обращающаяся в нуль в точках t_1 и t_2 (существование таких вариаций вытекает из теоремы 1). Согласно классическим результатам вариационного исчисления $z(t)=0$ при всех $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, что и требовалось.

Замечание. Для интегрируемых связей этот результат, хотя и не сформулирован в явном виде, но фактически содержится в работах Г. К. Суслова, посвященных распространению метода Гамильтона—Якоби на случай избыточности обобщенных координат [2]. Вычисления Г. К. Суслова следует дополнить условием положительной определенности функции Лагранжа, которое гарантирует разрешимость неявных уравнений.

Если силы потенциальны с потенциалом — $\mathcal{U}(q, t)$, то уравнения движения имеют гамильтонов вид:

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{20}$$

где $H=\mathcal{K}+\mathcal{U}$ — функция Гамильтона.

Обратимся теперь к принципу стационарности действия (11). Справедлива

Теорема 3. *Кривая $q^*(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, является экстремалью функционала действия (в классе вариаций с полузакрепленными концами) в том и только в том случае, если существует функция $p^*(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, такая, что*

1) $\langle p^*(t_2), a_s(q^*(t_2), t_2)\rangle=0, \qquad 1\leqslant s\leqslant m;$

2) $\dot{p}=\dfrac{\partial H}{\partial p},\ \dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial q},\ p=p^*(t),\ q=q^*(t),$

где $H(p, q, t)=(\langle p, \dot{q}\rangle-L)|_{p,q,t}$.

Это утверждение доказывается точно так же, как теорема 2. Покажем, что если связи однородны ($b_s\equiv 0$, $1\leqslant s\leqslant m$), то экстремали действия совпадают с движениями. Действительно, в обоих случаях функции $p(t)$, $q(t)$ удовлетворяют одним и тем же уравнениям Гамильтона, разница лишь в краевых условиях для $p(t)$. Однако если $b_s\equiv 0$, то функция Гамильтона допускает семейство трансляций $p \to p + \Sigma\mu_s a_s$, которое переводит решения уравнений (20) в решения тех же уравнений. Если вектор $p^*(t_2)$ удовлетворяет условию 1 теоремы 2, то при подходящих значениях $\mu_1, \ldots, \mu_m$ вектор $p^*(t_2)+\Sigma\mu_s a_s$ удовлетворяет аналогичному условию теоремы 3.

5. **Пример: скольжение конька по льду.** Пусть x, y — координаты точки касания лезвия конька, а φ — угол поворота лезвия. Предполагаем, что лезвие всегда перпендикулярно горизонтальной плоскости льда, а центр тяжести лежит на вертикальной прямой, проходящей через точку касания. Уравнение неинтегрируемой связи в этом случае: $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$. Выбрав подходящим образом единицы измерения массы и длины, кинетическую энергию конька можно представить в следующем виде: $(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{\varphi}^2)/2$. Канонические импульсы введем по формулам

$$p_x = \dot{x} - \lambda\sin\varphi, \quad p_y = \dot{y} + \lambda\cos\varphi, \quad p_\varphi = \dot{\varphi}; \quad \lambda = p_y\cos\varphi - p_x\sin\varphi. \tag{21}$$

Функция Гамильтона H равна

$$\frac{1}{2}\left[(p_x\cos\varphi + p_y\sin\varphi)^2 + p_\varphi^2\right]. \tag{22}$$

Без ущерба общности можно считать, что в начальный момент времени $\dot{x}(0)=v$, $\dot{y}(0)=0$, $\varphi(0)=0$, $\dot{\varphi}(0)=\omega$. Поскольку p_x и p_y — интегралы канонических уравнений с гамильтонианом (22), то из уравнений (21) с учетом равенства $\lambda=0$ при $t=0$ получим $p_x=v$, $p_y=0$. Тогда $\lambda = -v\sin\varphi$ и

$$\dot{x} = v\cos^2\varphi, \quad \dot{y} = v\sin\varphi\cos\varphi. \tag{23}$$

Угол φ как функцию времени найдем из одномерной канонической системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_\varphi^2 + v^2\cos^2\varphi).$$

Если постоянная интеграла энергии h равна $v^2/2$, то конек будет двигаться по прямой с постоянной скоростью. Если же $2h > v^2$, то вращение конька происходит по закону $\dot{\varphi} = \pm\sqrt{2h - v^2\cos^2\varphi}$. Следовательно, конек вращается монотонно в одну сторону, совершая один оборот за время

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2h - v^2\cos^2\varphi}}.$$

При этом $\sin\varphi(t)$ и $\cos\varphi(t)$ будут периодическими функциями с периодом T. Из формул (23) следует, что $x = Xt + \tilde{x}(t)$, $y = Yt + \tilde{y}(t)$, где $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{y}(t)$ — периодические функции с периодом T, а

$$X = \frac{v}{T}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2h - v^2\cos^2\varphi}}, \quad Y = \frac{v}{T}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2h - v^2\cos^2\varphi}}.$$

Очевидно, что $Y=0$, а $X \neq 0$, если $v \neq 0$. Значит, точка касания будет периодически обращаться по некоторой замкнутой кривой, которая в свою очередь будет двигаться с постоянной скоростью в сторону ее начальной скорости. Если $v=0$, то конек совершает чистое вращение. Заметим, что согласно неголономной механике лезвие конька всегда скользит по некоторой окружности с постоянной скоростью.

V. V. Kozlov

DYNAMICS OF SYSTEMS WITH NON-INTEGRABLE RESTRICTIONS. I

We propose a new mathematical model of the dynamics of mechanical systems with non-integrable restrictions. It is based on a generalization of the famous principle of the least action.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аппель П. Теоретическая механика, т. 1, 2. М., 1960.
2. Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.—Л., 1946.
3. Румянцев В. В. О принципе Гамильтона для неголономных систем.— Прикл. матем. и механ., 1978, 42, вып. 3, с. 387—399.
4. Румянцев В. В. О принципе Гамильтона и обобщенном методе Гамильтона—Якоби для неголономных систем.— Teorijska i primenjena mehanika, 1978, N 4, p. 131—138.
5. Rumyantsev V. V., Sumbatov A. V. On the problem of a generalization of the Hamilton—Jacobi method for nonholonomic systems.— Z. angew. Math. und Mech., 1978, 58, N 11, p. 477—481.

Поступила в редакцию
28.09.81