СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф. Л. О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами.— Прикл. матем. и механ., 1978, 42, № 1, с. 34—42.
2. Вильке В. Г. Предельные движения системы тяжелое упругое — твердое тело с неподвижной точкой.— Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1980, № 3, с. 79—83.
3. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
4. Аппель П. Теоретическая механика, т. 2. М., 1960.

Поступила в редакцию
07.05.80

УДК 531.01
В. В. Козлов

ДВЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ЗАДАЧИ КЛАССИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

1. Уравнения Гамильтона в избыточных координатах. Рассмотрим движение материальной точки единичной массы в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3\{x, y, z\}$ по гладкой регулярной поверхности Σ, заданной уравнением $f(x, y, z)=0$. Пусть на точку действует потенциальная сила с потенциалом $V(x, y, z)$. Уравнения движения этой точки можно записать в виде уравнений Лагранжа с множителями [1, п. 262]:

$$\ddot{x}=\frac{\partial V}{\partial x}+\Lambda f_x', \quad \ddot{y}=\frac{\partial V}{\partial y}+\Lambda f_y', \quad \ddot{z}=\frac{\partial V}{\partial z}+\Lambda f_z'; \qquad f(x, y, z)=0. \quad (1)$$

Уравнения (1), записанные в избыточных координатах x, y, z, можно представить в гамильтоновой форме. Для этого положим

$$p_x=\dot{x}+\lambda f_x', \quad p_y=\dot{y}+\lambda f_y', \quad p_z=\dot{z}+\lambda f_z'; \qquad \lambda=\frac{p_xf_x'+p_yf_y'+p_zf_z'}{f_x'^2+f_y'^2+f_z'^2}. \quad (2)$$

Полная энергия точки равна, очевидно,

$$H=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-V=\frac{(p_yf_z'-p_zf_y')^2+(p_zf_x'-p_xf_z')^2+(p_xf_y'-p_yf_x')^2}{2(f_x'^2+f_y'^2+f_z'^2)}-V. \quad (3)$$

Можно показать, что уравнения (1) эквивалентны гамильтоновой системе

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}, \ \ldots \quad (4)$$

Гамильтониан (3) запишем в следующем виде:

$$H=\frac{1}{2}(\mathbf{p}\times\mathbf{n})^2-V,$$

где $\mathbf{p}=(p_x, p_y, p_z)$, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности Σ. Следовательно, канонические уравнения (4) определяются самой поверхностью Σ и не зависят от вида уравнения $f=0$, задающего эту поверхность.

Уравнения (4) имеют интеграл энергии $H=h$ и «геометрический» интеграл $f=c$. Относительный интегральный инвариант Пуанкаре $J=\oint\limits_{\Gamma} p_xdx+p_ydy+p_zdz$ в случае, когда контур Γ лежит на поверхности $\{f=0\}\subset\mathbf{R}^6\{x, p_x, \ldots\}$, можно представить в следующем виде:

$$J=\oint\limits_{\gamma}\dot{x}dx+\dot{y}dy+\dot{z}dz, \quad (5)$$

где γ — замкнутый контур в $\mathbf{R}^6\{x, \dot{x}, \ldots\}$, являющийся образом контура Γ

при отображении (2). В гидродинамике интеграл (5) называется циркуляцией скорости.

Отметим в заключение, что и в общем случае системы материальных точек уравнения движения можно представить в гамильтоновой форме.

2. *Гамильтоновость уравнений Эйлера—Пуассона.* Рассмотрим теперь движение твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном силовом поле. Пусть I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции тела; X_1, X_2, X_3 — проекции угловой скорости на оси инерции, а x_1, x_2, x_3 — направляющие косинусы оси симметрии силового поля относительно осей инерции. Потенциальная энергия тела U зависит лишь от x_1, x_2, x_3. Уравнения вращения твердого тела описываются известной системой Эйлера—Пуассона:

$$I_1\dot{X}_1 + (I_2 - I_3) X_2 X_3 = x_2 \frac{\partial U}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial U}{\partial x_2}, \ \ldots \tag{6}$$

$$\dot{x}_1 = X_2 x_3 - X_3 x_2, \ldots$$

Рассмотрим следующую каноническую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{(p_2q_3 - p_3q_2)^2}{I_1} + \frac{(p_3q_1 - p_1q_3)^2}{I_2} + \frac{(p_1q_2 - p_2q_1)^2}{I_3}\right\} + U(q_1, q_2, q_3). \tag{7}$$

Положим

$$X_1 = \frac{p_2x_3 - p_3x_2}{I_1}, \quad X_2 = \frac{p_3x_1 - p_1x_3}{I_2}, \quad X_3 = \frac{p_1x_2 - p_2x_1}{I_3}; \qquad x_i = q_i,$$

$$i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что производные от X_i, x_i $(i=1, 2, 3)$, вычисленные согласно гамильтоновой системе (7), удовлетворяют уравнениям Эйлера—Пуассона (6).

Замена переменных (8) не является взаимно-однозначной: момент количества движения тела относительно оси симметрии силового поля $M = \Sigma I_i X_i x_i$ в канонических переменных p_i, q_i $(i=1, 2, 3)$ тождественно равен нулю. В общем случае, когда $\Sigma x_i^2 \neq 0$, ранг матрицы Якоби преобразования (8) равен пяти.

Таким образом, при нулевом значении постоянной площадей уравнения Эйлера—Пуассона можно представить в гамильтоновой форме. Отметим, что при этом q_1, q_2, q_3 будут избыточными координатами.

Канонические уравнения (7) имеют два первых интеграла: H (интеграл энергии) и $\Gamma = \Sigma q_i^2$ («геометрический» интеграл). Очевидно, что в стандартной канонической структуре $\Sigma dp_i \wedge dq_i$ скобка Пуассона $(H, \Gamma) \equiv 0$. Пусть $f(X_i, x_j)$ — первый интеграл уравнений Эйлера—Пуассона, а F — функция f, записанная в канонических переменных p_i, q_i. Ясно, что $(H, F) \equiv 0$. Покажем, что скобка (Γ, F) тоже равна нулю. Действительно,

$$(\Gamma, F) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial \Gamma}{\partial p_i}\right) = 2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial F}{\partial p_i} q_i =$$

$$= 2\left\{X_1\left(\frac{\partial f}{\partial X_3}\frac{x_2}{I_3} - \frac{\partial f}{\partial X_2}\frac{x_3}{I_2}\right) + X_2\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\frac{x_3}{I_1} - \frac{\partial f}{\partial X_3}\frac{x_1}{I_3}\right) + \right.$$

$$\left. + X_3\left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\frac{x_1}{I_2} - \frac{\partial f}{\partial X_1}\frac{x_2}{I_1}\right)\right\} \equiv 0.$$

Если f — частный интеграл уравнений Эйлера—Пуассона при нулевой постоянной интеграла площадей ($f=0$ при $M=0$), то снова $(H,F)=0$ и $(\Gamma,F)=0$. Если F не зависит от H и Γ, то система канонических уравнений (7) является вполне интегрируемой. В частности, если твердое тело вращается в однородном силовом поле, то система (7) вполне интегрируема в известных случаях Эйлера, Лагранжа, Ковалевской и Горячева—Чаплыгина [2].

Уравнения (7) имеют относительный интегральный инвариант Пуанкаре

$$J=\oint_{\Lambda}\sum_{i=1}^{3}p_i dq_i, \tag{9}$$

где Λ — замкнутый контур в $\mathbf{R}^6\{p,q\}$. Используя векторные обозначения, можно записать, что $\Sigma p_i dq_i=\mathbf{p}\cdot d\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}=(p_1,\ p_2,\ p_3)$, $\mathbf{q}=(q_1,\ q_2,\ q_3)$. Если $\mathbf{K}=(I_1X_1,\ I_2X_2,\ I_3X_3)$, то $\mathbf{K}=\mathbf{p}\times\mathbf{q}$. Отсюда следует, что $\mathbf{p}=\mathbf{q}\times\mathbf{K}/\|\mathbf{q}\|+\alpha\mathbf{q}$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Пусть, в частности, контур Λ лежит на инвариантной сфере Пуассона $\{\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}=1\}\subset\mathbf{R}^6\{p,q\}$. Тогда $\mathbf{q}\cdot d\mathbf{q}=0$, $\|\mathbf{q}\|=1$ и, следовательно, $\mathbf{p}\cdot d\mathbf{q}=(\mathbf{q}\times\mathbf{K})\cdot d\mathbf{q}$. В этом случае интегральный инвариант (9) можно записать так:

$$J=\oint_{\Lambda}(\mathbf{q}\times\mathbf{K})\cdot d\mathbf{q}=$$

$$=\oint_{\lambda}(I_3X_3x_2-I_2X_2x_3)\,dx_1+(I_1X_1x_3-I_3X_3x_1)\,dx_2+(I_2X_2x_1-I_1X_1x_2)\,dx_3,$$

где λ — замкнутый контур в $\mathbf{R}^6\{X,x\}$, являющийся образом контура Λ при отображении (8). Надо помнить, что J является инвариантом только в том случае, когда в начальный (значит, и в любой) момент времени $M=0$. В традиционных канонических переменных ϑ, φ, p_ϑ, p_φ (ϑ, φ — углы Эйлера) интеграл J имеет стандартный вид:

$$\oint p_\vartheta d\vartheta+p_\varphi d\varphi.$$

3. *Две интегрируемые задачи.* Пусть материальная точка единичной массы движется по инерции по трехосному эллипсоиду $ax^2+by^2+cz^2=1$ (задача Якоби; [1], п. 305, и [3]). Пусть $x,\ y,\ z;\ p_x,\ p_y,\ p_z$ — естественные избыточные канонические переменные. После канонической замены $p_1=p_x/\sqrt{a}$, $x_1=x\sqrt{a}, \ldots$ гамильтониан этой задачи будет равен $H=abcG/2F$, где

$$G=\frac{(p_2x_3-p_3x_2)^2}{a}+\frac{(p_3x_1-p_1x_3)^2}{b}+\frac{(p_1x_2-p_2x_1)^2}{c},\quad F=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2.$$

Задача о вращении твердого тела в интегрируемом случае Бруна (частицы твердого тела притягиваются неподвижной плоскостью с силой, пропорциональной расстоянию [1, п. 499]) описывается каноническими уравнениями (7), где $U=\varepsilon(I_1x_1^2+I_2x_2^2+I_3x_3^2)$, $\varepsilon\in\mathbf{R}$. Если положить теперь $I_1=a$, $I_2=b$, $I_3=c$, то гамильтониан (7) будет равен $E=G/2-\varepsilon F$. Ясно, что уровни $\{E=0\}$ и $\{H=abc\varepsilon\}$ — тождественные гиперповерхности в $\mathbf{R}^6\{p,x\}$. Покажем, что возникающие на них динамические системы имеют одни и те же траектории. Действительно,

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{abc}{2F}\,\frac{\partial G}{\partial p},\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{abc}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial x}F^{-1}-G\frac{\partial F}{\partial x}F^{-2}\right); \tag{10}$$

$$\dot{x}=\frac{\partial E}{\partial p}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial G}{\partial p},\quad \dot{p}=-\frac{\partial E}{\partial x}=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial G}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{11}$$

Положим $H = abc\varepsilon$, то есть $G/F = 2\varepsilon$. В системе (10) выполним замену времени вдоль траекторий: $d\tau = (abc/F)\,dt$. Тогда уравнения (10) представут в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial G}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial G}{\partial x} + \varepsilon\,\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{12}$$

Поскольку системы (11) и (12) тождественны, системы (10) и (11) имеют одни и те же траектории.

Таким образом, с точки зрения интегрируемости задача Якоби является частным случаем задачи Бруна динамики твердого тела.

V. V. Kozlov

TWO INTEGRABLE PROBLEMS OF THE CLASSICAL DYNAMICS

We prove that, from the integrability point of view, the Jacobi problem on the movement of the point on the ellipsoid is a particular case of the Brun problem in the dynamics of the rigid body with a fixed point.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аппель П. *Теоретическая механика*, т. 1, 2. М., 1960.
2. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М., 1953.
3. Якоби К. Лекции по динамике. М.—Л., 1936.

Поступила в редакцию
15.10.80