ЛИТЕРАТУРА

1. *Емельянова И. С., Фуфаев Н. А.* Об особенностях изучения состояний равновесия неголономной системы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6, с. 19.
2. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967, 519 с.
3. *Илиев Ил.* Геометрично разглеждане на метода на кинематическите характеристики. — Научн. тр. Высш. пед. ин-та, 1969, т. 7, кн. 1, с. 29.
4. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения неголономных систем.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 260.
5. *Николенко И. В.* О влиянии неголономных связей на характер равновесия системы.— Прикл. механика, 1965, т. 1, вып. 10, с. 65.

Пловдив

Поступила в редакцию
5.V.1980

УДК 532.36

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ СИЛ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

Козлов В. В.

В заметке изучается влияние диссипативных сил на устойчивость равновесий натуральных механических систем. Доказано, что если в положении равновесия аналитическая потенциальная энергия не имеет локального минимума, то после добавления сколь угодно малых диссипативных сил это равновесие станет неустойчивым.

1. Гипотеза о неустойчивости. Рассмотрим натуральную механическую систему с n степенями свободы; ее обобщенные координаты обозначим $(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$. Пусть $K(\mathbf{x}^{\cdot}, \mathbf{x}) = \Sigma a_{ij}(\mathbf{x})\, x_i^{\cdot} x_j^{\cdot}$ — кинетическая, а $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$ — потенциальная энергия этой системы. Критические точки функции $\Pi(\mathbf{x})$ и только они являются положениями равновесия. Всюду ниже $\mathbf{x} = 0$ — критическая точка функции $\Pi(\mathbf{x})$ и $\Pi(0) = 0$. Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то равновесие устойчиво (теорема Лагранжа). Есть предположение, что когда система аналитична (т. е. функция $a_{ij}(\mathbf{x})$ и $\Pi(\mathbf{x})$ аналитические) и в положении равновесия потенциальная энергия не имеет локального минимума, то соответствующее состояние равновесия неустойчиво. По-видимому, аналогичное утверждение справедливо и для бесконечно дифференцируемого случая, однако, как показывает известный пример Пенлеве — Уинтнера

$$K = x^{\cdot 2}/2, \quad \Pi(x) = \exp x^{-2} \cos x^{-1} \quad (x \neq 0, \ \Pi(0) = 0)$$

нужно дополнительно требовать изолированность положения равновесия (или, по крайней мере, отсутствие критических точек функции $\Pi(x)$ в области $\{x\colon \Pi(\mathbf{x}) < 0, \|\mathbf{x}\| < \varepsilon\}$ при малых $\varepsilon > 0$). Доказательство этих предположений представляет сложную задачу, решенную лишь в некоторых частных случаях (см., например, [1—3]).

2. Неустойчивость равновесия при действии сил вязкого трения. Предположим, что на систему действуют еще непотенциальные силы $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot})\colon R^n\{\mathbf{x}\} \times R^n\{\mathbf{x}^{\cdot}\} \to R^n$ — некоторые гладкие вектор-функции. Уравнения движения будут иметь тогда следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}), \quad L = K - \Pi \tag{1}$$

Непотенциальные силы F будем называть силами вязкого трения, если $\mathbf{F}(\mathbf{x}, 0) = 0$ и $E^{\cdot} < 0$ при $\mathbf{x}^{\cdot} \neq 0$; здесь $E = K + \Pi$ — полная энергия системы (ср. с [4], гл. VIII). Нетрудно проверить, что положения равновесия новой механической системы будут снова совпадать с критическими точками функции $\Pi(\mathbf{x})$. При этом состояния равновесия устойчивые по теореме Лагранжа, останутся устойчивыми и при добавлении сил вязкого трения. В следующем пункте будет доказана

Теорема. Пусть точка $\mathbf{x} = 0$ не является локальным минимумом функции $\Pi(\mathbf{x})$. Состояние равновесия $(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}) = (0, 0)$ системы (1) неустойчиво, если выполнено одно из следующих условий:

А) функция $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$ разлагается в сходящийся степенной ряд по $x_1, \ldots, x_n$ в окрестности нуля;

Б) функция $\Pi(\mathbf{x})$ бесконечно дифференцируема в окрестности нуля и при некотором $\varepsilon > 0$ в области $\{\mathbf{x}\colon \Pi(\mathbf{x}) < 0, \|\mathbf{x}\| < \varepsilon\}$ нет ее критических точек.

Постановка задачи об устойчивости равновесий при наличии сил вязкого трения только что сформулированное утверждение восходят к исследованиям Пуанкаре по устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости с учетом диссипации энергии [4]. Эту теорему можно рассматривать как обобщение известных результатов Кельвина [4], Четаева [2], Сальвадори [5] и др. авторов о влиянии диссипативных сил на устойчивость равновесия. Нас интересует не столько сам факт неустойчивости положения равновесия, сколько механизм этого явления, проясняющийся в ходе доказательства теоремы.

3. Доказательство теоремы. *Случай* Б. Рассмотрим движение $\mathbf{x}(t)$ со следующими начальными данными: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}^{\cdot}(0) = 0$; $\Pi(\mathbf{x}_0) < 0$ и $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \varepsilon$. Докажем существование некоторого малого числа $\delta > 0$, такого, что если $\|\mathbf{x}^{\cdot}(t)\| < \delta$, то $K^{\cdot\cdot}(\mathbf{x}^{\cdot}(t), \mathbf{x}(t)) \geqslant c_1 > 0$ (c_1, как и определяемые ниже числа $c_2, \ldots, c_5$, не зависит от времени, но зависит от ε и начальных условий). Для этого воспользуемся преобразованием Лежандра $\mathbf{p} = \partial K/\partial \mathbf{x}^{\cdot}$ и «каноническими» уравнениями

$$\mathbf{p}^{\cdot} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{x}^{\cdot} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{p}}$$

Очевидно, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, 0) = 0$. Вычислим сначала

$$K^{\cdot} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{p}^{\cdot} + \frac{\partial K}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}^{\cdot} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial K}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

Далее

$$K^{\cdot\cdot} = \left\langle \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{p}^2}\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle + \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

где $\langle , \rangle$ — обычное скалярное произведение в R^n, а гладкая функция $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ обращается в нуль при $\mathbf{p} = 0$. Поскольку $E^{\cdot}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}) \leqslant 0$ и $E(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0^{\cdot}) = \Pi(\mathbf{x}_0) < 0$, то траектория движения $\mathbf{x}(t)$ при $t \geqslant 0$, лежит в области $U = \{\mathbf{x}\colon \Pi(\mathbf{x}) \leqslant \Pi(\mathbf{x}_0) < 0\}$. В этой области при $\|\mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon$ нет критических точек функции $\Pi(\mathbf{x})$, метрика $K(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ невырождена, следовательно, при малых $\delta > 0$ из неравенства $\|\mathbf{x}^{\cdot}\| < \delta$ будет следовать оценка $K^{\cdot\cdot} \geqslant c_1 > 0$.

Так как $E^{\cdot} = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}) = 0$ только при $\mathbf{x}^{\cdot} = 0$, а для остальных значений скорости $f < 0$, то при $\mathbf{x} \in U \cap \{\|\mathbf{x}\| < \varepsilon\}$ и $\delta/2 \leqslant \|\mathbf{x}^{\cdot}\| \leqslant \varepsilon$ функция $f = E^{\cdot} \leqslant -c_2$ ($c_2 > 0$). Докажем, что $E(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}^{\cdot}(t)) \to -\infty$ при $t \to +\infty$, если $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ и $\|\mathbf{x}^{\cdot}(t)\| < \varepsilon$. Это противоречие будет доказывать неустойчивость состояния равновесия $(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}) = (0, 0)$.

Действительно, при $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ и $\|\mathbf{x}^{\cdot}(t)\| < \varepsilon$ функция $|K^{\cdot}(t)| \leqslant c_3$ ($c_3 > 0$). Если в некоторый момент времени $\|\mathbf{x}^{\cdot}\| < \delta/2$, то за конечный отрезок времени (в силу оценок $|K^{\cdot}| \leqslant c_3$, $K^{\cdot\cdot} \geqslant c_1$) величина $\|\mathbf{x}^{\cdot}\|$ станет не меньше δ. Причем отрезок времени Δ, когда $\|\mathbf{x}^{\cdot}\|$ увеличивается от $\delta/2$ до δ, допускает оценку $\Delta \geqslant c_4 > 0$. В течение этого времени $E^{\cdot} \leqslant -c_2 < 0$ и, следовательно, функция E уменьшится по крайней мере на $c_5 = c_2 c_4 > 0$. Таким образом, если существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k \to \infty$ ($k \to \infty$), такая, что $\|\mathbf{x}^{\cdot}(t_k)\| < \delta/2$, то, очевидно, $E(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$. Если же, начиная с некоторого момента времени, $\|\mathbf{x}^{\cdot}(t)\| \geqslant \delta/2$, то снова $E(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$.

Случай А выводится из случая Б, поскольку при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует лишь нулевое критическое значение аналитической функции $\Pi\colon \{\mathbf{x}\colon \|\mathbf{x}\| < \varepsilon\} \to R$ (см. [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., ОНТИ, Глав. ред. общетехн. лит-ры, 1935. 386 с.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
3. *Паламодов В. П.* Об устойчивости равновесия в потенциальном поле.— Функциональный анализ и его приложения, 1977, т. 11, вып. 4, с. 42—55.
4. *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. М.— Л., ОНТИ, Глав. ред. общетехн. лит-ры, 1936. 375 с.
5. *Salvadori L.* Sull'estensione ai sistemi dissipativi del criterio di stabilità di Routh.— Ricerche Mat., 1966, v. 15, No 2.
6. *Souček J., Souček V.* Morse—Sard theorem for real—analytic functions.— Comment. Math. Univ. Carolinae, 1973, v. 13, No 1. p. 45—51.

УДК 531.35

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА

Осепашвили В. З., Суликашвили Р. С.

На основе теоремы Рауса—Ляпунова [1] и ее обращения [2] исследуется устойчивость и бифуркация стационарных движений тяжелого гиростата со свободно вращающимся ротором.

Уравнения движения тяжелого гиростата со свободно вращающимся ротором с одной неподвижной точкой допускают следующие первые интегралы:

$$U = \frac{1}{2}\Big[\sum_{(1\,2\,3)} (J_1\omega_1^2 + 2I\varphi^{\cdot}\omega_1\alpha_1 + 2\gamma_1 e_1) + I\varphi^{\cdot 2}\Big] = \mathrm{const} \tag{1}$$

$$U_1 = \sum_{(1\,2\,3)} (J_1\omega_1 + I\varphi^{\cdot}\alpha_1)\gamma_1 = k = \mathrm{const}$$

$$U_2 = \varphi^{\cdot} + \sum_{(1\,2\,3)} \omega_1\alpha_1 = \Omega = \mathrm{const}$$

$$U_3 = \sum_{(1\,2\,3)} \gamma_1^2 = 1$$

Здесь ω_i — проекции вектора абсолютной угловой скорости гиростата на его главные оси инерции x_i, J_i — главные моменты инерции гиростата, α_i — косинусы углов, образуемых осью ротора с осями x_i, I — момент инерции ротора относительно его оси вращения, φ — угол поворота ротора, γ_i — косинусы углов, образуемых восходящей вертикалью с осями x_i, e_i — постоянные, пропорциональные проекциям на оси x_i вектора, проведенного из неподвижной точки O в центр масс тела C. Знак суммирования с символом (123) означает, что слагаемые получаются из написанных круговой перестановкой индексов 1,2,3.

Исследуем стационарные движения рассматриваемой механической системы, их устойчивость и бифуркацию.

Введем в расмотрение функцию

$$W = U - \omega(U_1 - k) + 1/2\lambda\omega^2(U_3 - 1) - I_\mu(U_2 - \Omega)$$

где ω, λ, μ — неопределенные множители Лагранжа.

Согласно теореме Рауса—Ляпунова для определения стационарных движений системы имеем уравнения

$$\partial W/\partial\omega_1 = J_1\omega_1 + g_1 - \omega J_1\gamma_1 - I\mu\alpha_1 = 0 \qquad (1\;2\;3) \tag{2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\varphi^{\cdot}} = \sum_{(1\,2\,3)} I\omega_1\alpha_1 + I\varphi^{\cdot} - \omega\sum_{(1\,2\,3)} I\alpha_1\gamma_1 - I\mu = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial\gamma_1} = e_1 - \omega(J_1\omega_1 + I\varphi^{\cdot}\alpha_1) + \lambda\omega^2\gamma_1 = 0 \quad (1\,2\,3)$$

где $g_i = I\varphi^{\cdot}\alpha_i$ — проекции на оси x_i вектора гиростатического момента.

Из уравнений (2) находим

$$\omega_1 = \omega\gamma_1, \quad \gamma_1 = \frac{e_1 - \omega g_1}{\omega^2(J_1 - \lambda)} \quad (1\,2\,3), \quad \varphi^{\cdot} = \mu \tag{3}$$

Подставляя эти значения в интегралы $U_1 = k$, $U_2 = \Omega$ и $U_3 = 1$, получаем следующие соотношения:

$$F(\omega, \lambda, \mu) = \omega^4 - \sum_{(1\,2\,3)} \frac{(e_1 - \omega g_1)^2}{(J_1 - \lambda)^2} = 0 \tag{4}$$

$$\Omega = \mu\Big[1 - I\sum_{(1\,2\,3)} \frac{\alpha_1^2}{J_1 - \lambda}\Big] + \sum_{(1\,2\,3)} \frac{e_1\alpha_1}{J_1 - \lambda}$$

$$k = \frac{1}{\omega^3}\Big[\sum_{(1\,2\,3)} \frac{J_1 e_1^2}{(J_1 - \lambda)^2} - I\mu\omega\sum_{(1\,2\,3)} \frac{(J_1 + \lambda)e_1\alpha_1}{(J_1 - \lambda)^2} + \lambda I^2\mu^2\omega^2\sum_{(1\,2\,3)} \frac{\alpha_1^2}{(J_1 - \lambda)^2}$$

Из (4) можно найти k, ω, μ как функции от λ и Ω. Из соотношений (3) и (4) заключаем, что при заданных значениях параметров I, J_i, α_i, e_i ($i = 1, 2, 3$), т. е. для заданной механической системы, значения величин ω_1, ω_2, ω_3, $\varphi^{\cdot}$, γ_1, γ_2, γ_3, соответствующие стационарным движениям, можно рассматривать как функции двух независимых параметров λ и Ω. Если величина интеграла площадей k задана, то параметры λ и Ω не будут независимыми; связь между ними определяется соотношением $k = k(\lambda, \Omega)$.

Исследуем устойчивость движения (3) по отношению к величинам $\varphi^{\cdot}$, ω_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$). В возмущенном движении положим

$$\omega_1 = \omega_1^\circ + \xi_1, \gamma_1 = \gamma_1^\circ + \eta_1 \ (1\ 2\ 3), \ \varphi^{\cdot} = \varphi^{\cdot\circ} + \zeta$$

Условия устойчивости [3] получим из теоремы Рауса—Ляпунова как достаточные условия знакоопределенности второй вариации

$$\delta^2 W = IP\zeta^2 + \sum_{(1\,2\,3)} [J_1 z_1^2 - (J_1 - \lambda)\omega^2\eta_1] \tag{5}$$

$$z_1 = \xi_1 + \frac{I\alpha_1\zeta}{J_1} - \omega\eta_1 \ (1\ 2\ 3); \quad P = 1 - I\sum_{(1\,2\,3)} \frac{\alpha_1^2}{J_1}$$

на линейном многообразии, определяемом уравнениями

$$\delta U_1 = \sum_{(1\,2\,3)} [J_1\gamma_1^\circ z_1 + (2J_1\gamma_1^\circ\omega + I\mu\alpha_1)\eta_1] = 0 \tag{6}$$

$$\delta U_2 = P\zeta + \sum_{(1\,2\,3)} (\alpha_1 z_1 + \omega\alpha_1\eta_1) = 0, \qquad \delta U_3 = \sum_{(1\,2\,3)} \gamma_1^\circ\eta_1 = 0$$

Для положительной определенности квадратичной формы (5) при условиях (6) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\Delta_9 > 0, \ D = -\Delta_{10} > 0 \tag{7}$$

$$\Delta_9 = \frac{J_1 J_2 J_3 I^2 P}{\omega^4 (J_1 - \lambda)(J_2 - \lambda)^2}[(J_2 - \lambda)^3\alpha_1^2 + (J_1 - \lambda)^3\alpha_2^2 -$$
$$- I(J_1 - J_2)^2\alpha_1^2\alpha_2^2][\lambda\omega^2 + (J_3 - \lambda)\omega^2\gamma_3^2 +$$
$$+ I\Omega(I - \Omega) - I^2\Omega^2(J_1 - J_2)^2\alpha_1^2\alpha_2^2]$$

$$\frac{D}{J_1 J_2 J_3 P\omega^2} = 4I\omega^2\sum_{(1\,2\,3)} J_1\gamma_1^2 - \sum_{(1\,2\,3)} (J_1 - \lambda)\{A(\gamma_3\alpha_2 - \gamma_2\alpha_3)^2 +$$
$$+ B(\gamma_3\alpha_2 - \gamma_2\alpha_3)(J_3 - J_2)\gamma_2\gamma_3 + 4\omega^2\gamma_2^2\gamma_3^2(J_3 - J_2)^2\} +$$
$$+ \omega^2\Big[\sum_{(1\,2\,3)} \gamma_1^2(J_2 - \lambda)(J_3 - \lambda)\Big]\Big[\sum_{(1\,2\,3)} J_1\gamma_1^2 - I\Big(\sum_{(1\,2\,3)} \gamma_1\alpha_1\Big)^2\Big]$$