О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

В. В. Козлов

1. Рассмотрим каноническую систему уравнений

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x}; \quad (x, y)\in \mathbf{R}^{2n} \tag{1}$$

с бесконечно дифференцируемым гамильтонианом $H = K(x, y) + \Pi(x)$, где $K = \langle A(x)y, y\rangle/2$ — положительно определенная квадратичная форма ($\langle\ ,\ \rangle$ — обычное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$). Пусть $x = 0$ — критическая точка функции $\Pi(x)$ ($\Pi(0) = 0$). Система (1) имеет тогда очевидное решение $(x, y) = (0, 0)$, которое называется состоянием равновесия (точка $x = 0$ — положение равновесия). Если в положении равновесия потенциальная энергия Π имеет строгий локальный минимум, то состояние равновесия устойчиво (теорема Лагранжа).

2. С помощью подходящего линейного канонического преобразования можно добиться того, чтобы в новых переменных (которые снова будем обозначать x, y) кинетическая энергия $K = \langle y, y\rangle/2 + \langle B(x)y, y\rangle/2$, $B(0) = 0$.

Лемма 1 (ср. с [1], [2]). *Пусть точка $x = 0$ не является локальным минимумом функции $\Pi(x)$. Предположим, что в области $U_\varepsilon^- = \{x\colon\ \Pi(x) < 0,\ \ |x| < \varepsilon\}$ существует гладкое векторное поле $v(x)$, такое, что:*

1) $\langle v, \Pi'\rangle \leqslant 0$ *в области* U_ε^-;

2) $\langle v'\xi, \xi\rangle \geqslant c\langle\xi, \xi\rangle$ *для всех* $\xi \in \mathbf{R}^n$ *и* $x \in U_\varepsilon^-(c > 0)$,

3) $|v(x)| \geqslant \alpha(|x|)$, $\alpha \to 0$ *при* $|x| \to 0$.

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что если $(x(t), y(t))$ — решение гамильтоновой системы (1) с отрицательной полной энергией $H(x(t), y(t))$ и $x(0) \in U_{\varepsilon_0}^-$, то $|x(t)| > \varepsilon_0$ при некотором $t > 0$.

Для доказательства рассмотрим новое векторное поле $w(x) = v(x) - \sigma\Pi'$. При малых $\sigma > 0$, очевидно, $\langle w'\xi, \xi\rangle \geqslant \sigma_1\langle\xi, \xi\rangle(\sigma_1 > 0)$. Согласно 1) $\langle w, \Pi'\rangle \leqslant -\sigma\langle\Pi', \Pi'\rangle$. Поскольку $\Pi'(0) = 0$, то векторное поле w удовлетворяет условию 3). Положим $f(t) = \langle w(x(t)), y(t)\rangle$. Тогда

$$\dot{f} = \langle w'y, y\rangle - \langle w, \Pi'\rangle + \langle w'By, y\rangle - \langle w, \langle B'y, y\rangle\rangle/2. \tag{2}$$

Поскольку $B(0) = 0$ и $|w(x)| \to 0$ при $|x| \to 0$, то при $|x| \leqslant \varepsilon_0$ (ε_0 мало) из равенства (2) будем иметь оценку $\dot{f} \geqslant \sigma_1 |y|^2/2 + \sigma |\Pi'|^2 \geqslant \vartheta > 0$. Если при всех $t > 0$ справедливо неравенство $|x(t)| \leqslant \varepsilon_0$, то, очевидно, $f(t)$ ограничена. Однако это противоречит оценке $\dot{f} \geqslant \vartheta > 0$.

Замечание. Пусть $x(t)$, $y(t)$ — решение гамильтоновой системы (1) с нулевой полной энергией. Если положение равновесия $x = 0$ изолировано, то (в предположениях леммы 1) каждое движение $x(t)$ либо покидает некоторую область $|x| \leqslant \varepsilon_0$ за конечный промежуток времени, либо стремится к нулю при $t \to \infty$ (ср. с [1]).

3. С помощью леммы 1 доказывается

Теорема. *Пусть $x = 0$ — критическая точка аналитической функции $\Pi(x)$, которая не является ее локальным минимумом. Состояние равновесия $(x, y) = (0, 0)$ неустойчиво, если выполнено одно из следующих условий:*

А) $\Pi(x)$ — *квазиоднородная функция*;

Б) $\Pi(x)$ — *полуквазиоднородная функция.*

4. Многочлен $\Pi(x_1 \ldots x_n)$ называется квазиоднородной функцией степени $s \in \mathbf{N}$ с показателями $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{N}$, если при любом $\lambda \in \mathbf{R}$ имеем $\Pi(\lambda^{\alpha_1}x_1 \ldots \lambda^{\alpha_n}x_n) = \lambda^s\Pi(x_1 \ldots x_n)$. Положим $v(x) = \Lambda x$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Поле $v(x)$ удовлетворяет условиям 2) и 3) леммы о неустойчивости. Условие 1) вытекает из следующей «формулы Эйлера»: $\langle\Pi', \Lambda x\rangle = s\Pi$.

5. Аналитическая функция $\Pi(x)$ называется полуквазиоднородной, если $\Pi = \Pi_0 + \Pi_1$, где Π_0 — невырожденная квазиоднородная функция ($x = 0$ — ее изолированная критическая точка) степени s, а любой моном ряда Маклорена функции Π_1, рассматриваемый как квазиоднородная функция с теми же показателями, имеет степень строго больше s. Не всякая квазиоднородная функция полуквазиоднородна.

Введем в $\mathbf{R}^n$ «квазиоднородную» норму $|x|_* = |x_1|^{1/\alpha_1} + \ldots + |x_n|^{1/\alpha_n}$. Очевидно, $\Pi_1 = o(|x|_*^s)$. Поскольку $\Pi'(0) = 0$, то $s > \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Для любого $m \in \mathbf{N}$ при малых значениях $|x|_*$ справедливо неравенство

$$c\,|x|_*^{2m} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\right)^{2m/(s-\alpha_i)} \leqslant C\,|x|_*^{2m} \tag{3}$$

с положительными постоянными c и C. Положим $v(x) = \Lambda x - \sigma V(x)/|x|^{2m-s}$, где

$$V(x) = \left\{\ldots,\ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\right)^{\frac{2m}{s-\alpha_i}-1},\ \ldots\right\}, \qquad m = (s-\alpha_1)\ldots(s-\alpha_n).$$

При малых значениях σ и ε выполнены условия 2) и 3) леммы 1. Так как

$$\langle v,\ \Pi'\rangle = s\Pi_0 + o\,(|x|_*^s) - \sigma \sum \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\right)^{2m/(s-\alpha_i)} \Big/ |x|_*^{2m-s},$$

то при достаточно малых $|x|_*$ с учетом неравенства (3) будем иметь $\langle v,\ \Pi'\rangle \leqslant s\Pi - \sigma_2 |x|_*^s < 0$ $(\sigma_2 = c\sigma/2)$.

6. Из теоремы п. 3 можно вывести некоторые известные результаты, касающиеся неустойчивости положений равновесия в потенциальном поле (см., например, работы Н. Г. Четаева [2], В. П. Паламодова [3] (теорема 2), В. Койтера [4]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Козлов. Неустойчивость равновесия в потенциальном поле.— УМН, 1981, 36:1, с. 209—210.

[2] Н. Г. Четаев. О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум.— ПММ, 1952, 16:1, с. 89—93.

[3] В. П. Паламодов. Об устойчивости равновесия в потенциальном поле.— Функц. анализ, 1977, 11:4, с. 42—55.

[4] W. T. Koiter. On the instability of equilibrium in the absence of a minimum of the potential energy.— Nederl. Acad. Wetensch. Proc., ser. B, 1965, 68:3, p. 107—113.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества 10 ноября 1980 г.