УДК 531.01

С. В. БОЛОТИН, В. В. КОЗЛОВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

Рассматриваются движения механических систем, стремящиеся к положениям равновесия при неограниченном возрастании времени.

1. Асимптотические движения. Пусть M — конфигурационное многообразие лагранжевой механической системы с функцией Лагранжа $L: TM\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ (см. [1]). Пусть $\langle\,,\rangle=\|\ \|^2$ — полная риманова метрика на M. Предположим, что функция L два раза непрерывно дифференцируема на $TM\times\mathbf{R}$ и существуют положительные постоянные c_1, c_2, c_3, c_4, такие, что

$$c_1\|\dot q\|^2-c_2\leqslant L(q,\dot q,t), \tag{1}$$

$$c_3\|v\|^2\leqslant L_{\dot q\dot q}(q,\dot q,t)(v,v)\leqslant c_4\|v\|^2 \tag{2}$$

для всех $(q,\dot q,t)\in TM\times\mathbf{R}$ и $v\in T_qM$. Здесь $L_{\dot q\dot q}(q,\dot q,t)$ — гессиан функции Лагранжа по $\dot q\in T_qM$.

Если конфигурационное многообразие M компактно, то условия (1) и (2) не зависят от выбора римановой метрики на M. Сделанные предположения можно значительно ослабить, однако и в таком виде они выполнены для большинства механических систем.

Определим функцию $H_0: M\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ по формуле

$$H_0(q,t)=H(q,0,t),$$

где $H: T^*M\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ — функция Гамильтона. Пусть $q_0\in M$ — положение равновесия. Без ограничения общности предположим, что $H_0(q_0,t)\equiv 0$. Назовем функцию H_0 отрицательно определенной, если для любой окрестности D точки q_0 существует $\varepsilon>0$, такое, что $H_0(q,t)\leqslant-\varepsilon$ при $q\notin D$.

Теорема 1. Если функция H_0 отрицательно определена, то для любых $q\in M$ и $\tau\in\mathbf{R}$ существует движение $\gamma:[\tau,+\infty)\to M$, такое, что $\gamma(\tau)=q$ и $\gamma(t)\to q_0$ при $t\to+\infty$.

Такие движения называются асимптотическими к положению равновесия q_0 при $t\to+\infty$. Чтобы доказать существование движений, асимптотических к q_0 при $t\to-\infty$, достаточно применить теорему к механической системе с функцией Лагранжа $\bar L(q,\dot q,t)=L(q,-\dot q,-t)$, полученной из L обращением времени.

2. Доказательство. По определению функции Гамильтона

$$H(q,p,t)=\sup_{\dot q}(p\cdot\dot q-L(q,\dot q,t)),$$

так что

$$L(q,\dot q,t)\geqslant-H_0(q,t)\geqslant 0=L(q_0,0,t).$$

Пусть $q \neq q_0$ и $\tau \in \mathbb{R}$. Определим на множестве $\Omega(q,\tau)$ кусочно-непрерывно дифференцируемых кривых $\gamma : [\tau, +\infty) \to M$, таких, что $\gamma(\tau) = q$ и $\gamma(t) \equiv q_0$ при всех достаточно больших $t > \tau$, функционал действия J по формуле

$$J(\gamma) = \int_{\tau}^{\infty} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\, dt \geqslant 0.$$

Пусть d — расстояние на M, индуцированное римановой метрикой $\| \ \|$. Для любой кривой $\gamma \in \Omega(q,\tau)$ и моментов времени $t_2 > t_1 \geqslant \tau$ по неравенству Коши—Буняковского

$$d^2(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leqslant \left(\int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt\right)^2 \leqslant (t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(t)\|^2\, dt.$$

Из условия (1) вытекает неравенство

$$d^2(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leqslant \frac{t_2 - t_1}{c_1} (J(\gamma) + c_2(t_2 - t_1)). \tag{3}$$

Пусть $T > \tau$. Обозначим через Ω_T множество кривых $\gamma \in \Omega(q,\tau)$, таких, что $\gamma(t) \equiv q_0$ при $t \geqslant T$. В силу (3) каждое подмножество Ω_T, на котором функционал J ограничен, равномерно ограничено и равностепенно-непрерывно. Отсюда и из условия (2) следует (см., например, [2]), что функционал $J|\Omega_T$ достигает своей точной нижней грани *на некоторой кривой* $\gamma_T \in \Omega_T$.

Функция $T \to J(\gamma_T)$, $T > \tau$, непрерывна, неотрицательна и не возрастает. Положив в (3) $t_1 = \tau$, $t_2 = T$, получим

$$J(\gamma_T) \geqslant c_1 \frac{d^2(q, q_0)}{T - \tau} - c_2(T - \tau), \tag{4}$$

откуда $J(\gamma_T) \to +\infty$ при $T \to \tau$.

Пусть $\tau_0 > \tau$. Тогда $J(\gamma_T) \leqslant J(\gamma_{\tau_0})$ при $T \geqslant \tau_0$. Из (3) следует, что семейство кривых $\{\gamma_T\}_{T \geqslant \tau_0}$ равномерно ограничено и равностепенно-непрерывно на любом конечном отрезке времени. По предположению расстояние d полно. Применив теорему Арцела и диагональный процесс, найдем последовательность $\tau_n \to \infty$, такую, что для любого $T > \tau$ последовательность γ_{τ_n} сходится к непрерывной кривой $\gamma : [\tau, +\infty) \to M$ равномерно на отрезке $[\tau, T]$. Так как для любого $\tau_n > T$ кривая $\gamma_{\tau_n} | [\tau, T]$ доставляет минимум действию Гамильтона на множестве кривых с концами в точках q и $\gamma_{\tau_n}(T)$, то кривая $\gamma | [\tau, T]$ является экстремалью действия Гамильтона на множестве кривых с концами в точках q и $\gamma(T) = \lim\limits_{n \to \infty} \gamma_{\tau_n}(T)$. Следовательно, *$\gamma$ — траектория движения и*

$$\int_{\tau}^{T} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \int_{\tau}^{T} L(\gamma_{\tau_n}(t), \dot{\gamma}_{\tau_n}(t), t)\, dt \leqslant \lim_{n \to \infty} J(\gamma_{\tau_n}).$$

Таким образом,

$$\int_{\tau}^{\infty} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\, dt \leqslant \inf\{J(\gamma) : \gamma \in \Omega(q, \tau)\}.$$

Так как функция H_0 отрицательно определена, то из неравенств (3) и (4) следует, что $\gamma(t) \longrightarrow q_0$ при $t \longrightarrow +\infty$. Теорема доказана.

3. Теорема о неустойчивости. Для неустойчивости положения равновесия q_0 достаточно неположительности функции H_0 в окрестности q_0. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. Если функция H_0 неположительна, то для любых $\varepsilon>0$, $q\in M$ и $\tau\in\mathbf{R}$ существует $\tau_0>\tau$ и движение $\gamma:[\tau,\tau_0]\longrightarrow M$, такое, что $\gamma(\tau)=q$, $\gamma(\tau_0)=q_0$ и $\|\dot\gamma(\tau_0)\|\leqslant\varepsilon$.

Для доказательства неустойчивости достаточно применить теорему к механической системе с функцией Лагранжа $\overline{L}$, полученной из L обращением времени.

Доказательство теоремы проводится методами предыдущего пункта. Выберем $h>0$ и положим $f(T)=J(\gamma_T)+h(T-\tau)$, $T>\tau$. Так как $f(T)\longrightarrow+\infty$ при $T\longrightarrow\tau$ и $T\longrightarrow+\infty$, то непрерывная функция f достигает минимума в некоторой точке $\tau_0\in(\tau,+\infty)$. Тогда $\gamma_{\tau_0}(\tau_0)=q_0$ и для любого $T>\tau$ и кусочно-непрерывно дифференцируемой кривой $\gamma:[\tau,T]\longrightarrow M$, такой, что $\gamma(\tau)=q$ и $\gamma(T)=q_0$,

$$\int_\tau^T (L(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)+h)\,dt \geqslant \int_\tau^{\tau_0}(L(\gamma_{\tau_0}(t),\dot\gamma_{\tau_0}(t),t)+h)\,dt.$$

Так как γ_{τ_0} — траектория движения, по формуле для вариации действия Гамильтона [1] имеем

$$H(q_0, L_{\dot q}(q_0,\dot\gamma_{\tau_0}(\tau_0),\tau_0),\tau_0)=h. \qquad (5)$$

Пусть $\varepsilon>0$. Можно показать, что при достаточно малом $h>0$ из (5) следует $\|\dot\gamma_{\tau_0}(\tau_0)\|\leqslant\varepsilon$. Доказательство закончено.

Пусть, например, функция Лагранжа не зависит от времени и квадратична по скорости:

$$L(q,\dot q)=\frac{1}{2}\|\dot q\|^2+\langle v(q),\dot q\rangle - V(q),$$

где v — векторное поле на M, а V — потенциальная энергия. Тогда

$$H(q,p)=\frac{1}{2}\|p\|^2-p\cdot v(q)+\frac{1}{2}\|v(q)\|^2+V(q).$$

Поэтому если

$$\frac{1}{2}\|v(q)\|^2+V(q)\leqslant V(q_0) \qquad (6)$$

для всех точек $q\in M$, достаточно близких к q_0, то q_0 — неустойчивое положение равновесия. Это теорема Хагедорна [3] об обращении теоремы Рауса.

4. Функция действия. Пусть функция H_0 отрицательно определена. Определим функцию $S: M\times\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ по формуле

$$S(q,\tau)=\inf\{J(\gamma):\gamma\in\Omega(q,\tau)\}.$$

Для любого $(q,\tau)\in M\times\mathbf{R}$ пусть $\gamma:[\tau,+\infty)\longrightarrow M$, $\gamma(\tau)=q$, $\lim\limits_{t\to\infty}\gamma(t)=q_0$, — движение, построенное в пункте 2. Для того чтобы имели место равенства

$$\lim_{t\to\infty}\dot\gamma(t)=0, \qquad (7)$$

$$\int_\tau^\infty L(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)\,dt=S(q,\tau), \qquad (8)$$

нужно наложить некоторые ограничения на поведение функции Лагранжа при $t \to \infty$. Чтобы упростить изложение, предположим, что функция Лагранжа периодична по времени. Тогда выполнены (7) и (8).

Функция действия S положительно определена и непрерывна, но, как правило, недифференцируема.

Теорема 3. Предположим, что для любого момента времени положение равновесия q_0 — точка невырожденного максимума функции H_0. Тогда существует окрестность $D \subset M \times \mathbf{R}$ прямой $q_0 \times \mathbf{R}$, такая, что

1) для любой точки $(q, \tau) \in D$ существует единственное движение $\gamma : [\tau, +\infty) \to M$, $\gamma(\tau) = q$, асимптотическое к точке q_0 внутри D;

2) функция S два раза непрерывно дифференцируема в D, имеет невырожденный минимум на прямой $q_0 \times \mathbf{R}$ и удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби $S_t + H(q, S_q, t) = 0$;

3) пусть $p(t)$ — импульс вдоль движения $\gamma(t)$, тогда $p(t) \equiv S_q(\gamma(t), t)$.

Для доказательства заметим, что если выполнены условия теоремы, то линеаризованная вблизи точки q_0 система удовлетворяет условиям теоремы 1. Поэтому уравнения в вариациях вблизи точки $(q_0, 0) \in T^*M$ имеют инвариантное подпространство, которое состоит из решений, асимптотических к точке $(q_0, 0)$, и однозначно проецируется на M. По теореме об устойчивом многообразии [4] фазовые траектории исходной механической системы, асимптотические к точке $(q_0, 0) \in T^*M$, заполняют гладкое инвариантное подмногообразие $W \subset T^*M \times \mathbf{R}$, диффеоморфно проецируемое на некоторую окрестность D прямой $q_0 \times \mathbf{R}$, Это доказывает первое утверждение теоремы. Зададим W в виде $W = \{(q, p(q, t), t) : (q, t) \in D\}$, где $(q, t) \in D \to p(q, t) \in T_q^*M$ — гладкое отображение. Если $\gamma : [\tau, +\infty) \to M$, $\gamma(\tau) = q$, — движение, асимптотическое к точке q_0, то $\dot{\gamma}(t) \equiv H_p(q, p(q, t), t)$. Таким образом, действие $S(q, \tau)$ вдоль траектории γ дифференцируемо зависит от $(q, \tau) \in D$. По формуле для вариации функции действия

$$dS(q, \tau) = p(q, \tau)\, dq - H(q, p(q, \tau), \tau)\, d\tau,$$

откуда $p(q, \tau) = S_q(q, \tau)$ и $S_\tau + H(q, p(q, \tau), \tau) = 0$. Теорема доказана.

Она усиливает результат А. Кнезера [5] о поведении асимптотических движений в окрестности невырожденного неустойчивого положения равновесия.

5. *Автономный случай.* Пусть функция Лагранжа не зависит от времени. Тогда имеет место интеграл энергии. Так как $H(q_0, 0) = 0$, то вдоль асимптотических траекторий $H \equiv 0$. Определим финслерову метрику F на M (метрику Якоби) по формуле

$$F(q, \dot{q}) = \sup\{p\dot{q} : p \in T_q^*M,\ H(q, p) = 0\}.$$

Например, для функции Лагранжа вида (5) метрика F задается классической формулой

$$F(q, \dot{q}) = \sqrt{2(V(q_0) - V(q))}\, \|\dot{q}\| + \langle v(q), \dot{q} \rangle.$$

Пусть $S = S(q)$ — функция действия. Докажем, что для любой точки $q \in M$ минимум длин в метрике F кривых, соединяющих точки q и q_0, равен $S(q)$ и достигается на траектории движения, асимптотического к точке q_0.

По определению преобразования Лежандра

$$L(q, \dot{q}) = \sup\{p\dot{q} - H(q, p) : p \in T_q^*M\} \geqslant$$
$$\geqslant \sup\{p\dot{q} - H(q, p) : p \in T_q^*M, H(q, p) = 0\} = F(q, \dot{q}),$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $H(q, L_{\dot{q}}(q, \dot{q})) = 0$. Поэтому для любой кривой $\gamma : [0, \infty) \to M$

$$J(\gamma) \geqslant \int_0^\infty F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt, \tag{9}$$

причем γ можно перепараметризовать таким образом, чтобы в (9) имел место знак равенства. Отсюда следует сформулированное утверждение.

Таким образом, траектория асимптотического движения является кратчайшей геодезической метрики Якоби, соединяющей точки q и q_0. Ее существование можно доказать методами римановой геометрии [6].

Если положение равновесия q_0 — точка невырожденного максимума функции H_0, то по теореме 3 сферы в метрике F достаточно малого радиуса — гладкие гиперповерхности в M, а асимптотические траектории пересекают их под прямым углом.

6. *Приложения.* Пусть конфигурационное многообразие M компактно, функция Лагранжа L квадратична по скорости и периодически (или почти-периодически) зависит от времени:

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, \dot{q}\rangle_t + \langle v(q, t), \dot{q}\rangle_t - V(q, t), \tag{10}$$

где $<, >_t$ — зависящая от времени риманова метрика на M. Тогда выполнены условия (1) и (2). Как и в пункте 3, положение равновесия $q_0 \in M$ неустойчиво, если

$$\frac{1}{2}\langle v(q, t), v(q, t)\rangle_t + V(q, t) \leqslant V(q_0, t) \tag{11}$$

для всех $q \in M$, достаточно близких к q_0, а если в (11) при $q \neq q_0$ имеет место строгое неравенство, то существуют движения, асимптотические к точке q_0.

Применим это замечание к задаче о движении плоского n-звенного маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса. Конфигурационным многообразием является n-мерный тор $T^n = \{q = (\theta_1, \ldots, \theta_n)\}$, где $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — углы отклонения звеньев от вертикали. Пусть $l_1, \ldots, l_n$ — длины звеньев; $m_1, \ldots, m_n$ — соответствующие массы, а $h(t) = h(-t)$ - высота точки подвеса маятника. Функция Лагранжа имеет вид (10):

$$L(q, q, t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} M_{\max(i,j)} l_i l_j \cos(\theta_i - \theta_j)\, \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j +$$
$$+ \dot{h}(t)\sum_{i=1}^{n} M_i l_i \sin\theta_i \dot{\theta}_i - g\sum_{i=1}^{n} M_i l_i \cos\theta_i,$$

где $M_i = \sum_{j=i}^{n} m_j$.

Пусть $q_0=(\pi, \ldots, \pi)$ — верхнее положение равновесия маятника. Можно показать, что если матрица

$$\left\| \begin{matrix} M_1 \left(1 - \frac{\dot{h}(t)^2}{l_1 g}\right), \ldots, M_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_n, \ldots, M_n \left(1 - \frac{\dot{h}(t)^2}{l_n g}\right) \end{matrix} \right\| \tag{12}$$

положительно определена для каждого момента времени, то при $q \neq q_0$ неравенство (11) строгое и, следовательно, существуют движения, начинающиеся в произвольный момент времени в любом положении маятника и асимптотические к положению равновесия q_0. Например, для однозвенного маятника верхнее положение равновесия неустойчиво при $\dot{h}(t)^2 \leqslant gl$, а асимптотические движения существуют при $\dot{h}(t)^2 < gl$. (Достаточное условие устойчивости, получаемое при $h \ll l$ методом усреднения, имеет вид $\overline{\dot{h}^2} > gl$.)

Назовем движение γ двоякоасимптотическим к точке q_0, если $\gamma(t) \to q_0$ и $\dot{\gamma}(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Покажем, что если матрица (12) положительно определена, то существуют по крайней мере 2^n-1 движений n-звенного маятника, двоякоасимптотических к верхнему положению равновесия.

Кроме верхнего существуют еще 2^n-1 инвариантных относительно отражения $q \to -q$ положений равновесия $q_i \in T^n$, $i=1, \ldots, 2^n-1$, n-звенного маятника. Пусть $\gamma: [0, +\infty) \to T^n$, $\gamma(0)=q_i$, — движение, асимптотическое к точке q_0 при $t \to +\infty$. Отображение $(q, \dot{q}, t) \to (-q, \dot{q}, -t)$ сохраняет функцию Лагранжа. Поэтому $\bar{\gamma}(t) = -\gamma(-t)$ — движение, асимптотическое к q_0 при $t \to -\infty$. Так как $\dot{\bar{\gamma}}(0) = \dot{\gamma}(0)$, то $\gamma: \mathbb{R} \to T^n$ — движение, двоякоасимптотическое к точке q_0. Можно показать, что полученные 2^n-1 двоякоасимптотические движения являются пределами обратимых периодических движений большого периода.

Авторы благодарны профессору В. В. Румянцеву, обратившему их внимание на задачи, связанные с существованием асимптотических движений.

S. V. Bolotin, V. V. Kozlov

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF EQUATIONS OF DYNAMICS

The paper deals with the properties of motions of time depending Lagrangian systems. Under some conditions the existence of asymptotic motions is proved. Some applications are given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М., 1974.
2. Palais R., Smale S. Generalized Morse theory. — Bull. Amer. Math. Soc., 1964, 70, N 1, 165—172.
3. Hagedorn P. Über die Instabilität konservativer Systeme mit gyroskopischen Kräften. — Arch. Ration Mech. and Anal., 1975, 58, N 1, 1—9.
4. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М., 1970.
5. Kneser A. Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen. — J. reine und angew. Math., 1897, 118, 186—223.
6. Козлов В. В. О геометрии областей возможных движений с краем. — Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1977, № 5, 118—120.

Поступила в редакцию
11.05.79