

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРИКЛАДНАЯ
МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

Том 44

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

2

МОСКВА · 1980

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНОГО МАЯТНИКА

В. В. Козлов

(Москва)

С помощью принципа наименьшего действия в форме Якоби доказано существование периодических колебаний составного маятника, лежащих на не критических уровнях интеграла энергии (на которых нет положений равновесия). Получены оценки количества различных либрационных и вращательных периодических колебаний в зависимости от величины полной энергии.

В работах, посвященных колебаниям составного маятника, обычно исследуется устойчивость положений равновесия, а также существование и некоторые свойства периодических и асимптотических движений в окрестности этих положений (см., например, [1]). По-видимому, в книге [2] впервые встречается замечание о том, что с помощью методов теории Морса можно доказать бесконечность числа различных периодических движений составного маятника при достаточно больших фиксированных значениях постоянной энергии.

1. Введение. Составной маятник — механическая система, состоящая из n шарнирно скрепленных стержней и находящаяся в однородном поле сил тяжести (фиг. 1). На распределение масс стержней не накладывается никаких ограничений. Конфигурационным пространством

этой системы служит n -мерный тор \mathbb{T}^n , а в качестве обобщенных координат можно взять углы q_1, \dots, q_n , которые образуют стержни с вертикальной прямой. Конфигурационным пространством можно считать евклидово пространство $\mathbb{R}^n\{q_1, \dots, q_n\}$, но при этом надо помнить, что точки в \mathbb{R}^n , q -координаты которых отличаются на 2π , отвечают одним и тем же положениям системы.

Кинетическая энергия

$$T(q, \dot{q}) = \sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

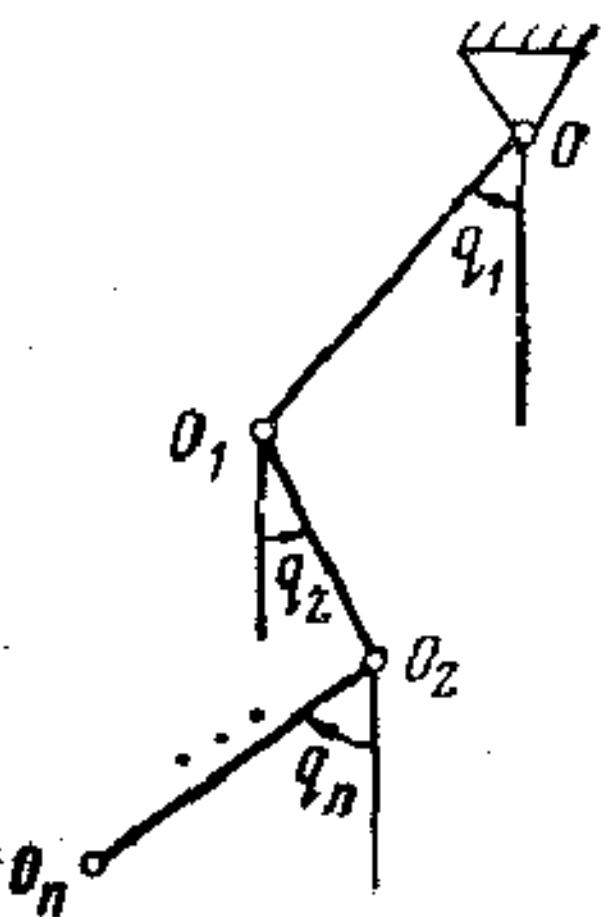
— положительно-определенная симметричная форма. Ее коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ периодичны по переменным q_1, \dots, q_n с периодом 2π . Потенциал поля сил тяжести

$V(q_1, \dots, q_n)$ также является функцией, 2π -периодической по каждому аргументу.

Уравнения движения

$$(1.1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad L = T + V$$

имеют первый интеграл — интеграл энергии $T - V = h$. Так как $T \geq 0$, то при фиксированном значении полной энергии h движение происходит



Фиг. 1

в области $D = \{h + V(q) \geq 0\}$, которая называется областью возможных движений. Границей ∂D области D служит множество $\{h + V(q) = 0\}$.

Точки $q = (m_1\pi, \dots, m_n\pi)$ (m_1, \dots, m_n — целые числа) и только они являются критическими точками потенциала V . Все они изолированы и невырождены. Критическим точкам отвечают положения равновесия n -звенного маятника. Значения полной энергии, соответствующие этим частным решениям, назовем критическими. При некритических значениях h граница ∂D — гладкое $(n - 1)$ -мерное многообразие.

Решение уравнений движения, лежащее на некритическом уровне интеграла энергии, будет периодическим тогда и только тогда, когда его траектория замкнута на T^n . Как показано в работе [3], траектории периодических движений натуральных систем могут быть двух типов: они либо не пересекаются с границей ∂D , либо имеют с ней ровно две общие точки. Решения первого типа естественно назвать вращениями, второго — либрациями (подробности см. в [3]).

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Рассмотрим натуральную механическую систему, конфигурационное пространство которой $\mathbb{R}^n \{q_1, \dots, q_n\}$. Пусть $T(q, \dot{q})$ — кинетическая энергия, а V — потенциал силового поля.

Обозначим через Λ_a отражение \mathbb{R}^n относительно некоторой точки $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$: $q \mapsto -q + 2a$. Предположим, что система инвариантна относительно преобразования Λ_a , т. е. $T(\Lambda_a q, \dot{q}) = T(q, \dot{q})$, $V(\Lambda_a q) = V(q)$.

Лемма 1. Если траектория некоторого решения $q(t)$ проходит через точку a ($q(0) = a$), то эта кривая инвариантна относительно отражения Λ_a (т. е. $q(-t) = \Lambda_a q(t) = -q(t) + 2a$). В частности, $\dot{q}(-t) = \dot{q}(t)$.

Доказательство. Так как кинетическая энергия T — квадратичная форма обобщенных скоростей и система инвариантна относительно отражения Λ_a , то функция $\dot{q}'(t) = -\dot{q}(t) + 2\dot{a}$ тоже является решением уравнений движения (1.1). Положим $q''(t) = q(-t)$. Поскольку $q'(0) = q''(0)$ и $\dot{q}'(0) = \dot{q}''(0)$, то по теореме единственности решений уравнений (1.1) $\dot{q}'(t) \equiv \dot{q}''(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 2. Предположим, что рассматриваемая система инвариантна относительно отражения Λ_b ($b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$). Если траектория некоторого решения $q(t)$ проходит через точки a и b , то

1) существует $\tau > 0$ такое, что $q(t + \tau) = q(t) + 2(b - a)$ для всех $t \in \mathbb{R}$;

2) скорость $\dot{q}(t)$ никогда не равна нулю.

Доказательство. 1). Поскольку система инвариантна относительно преобразований Λ_a и Λ_b , то она инвариантна относительно их композиции $\Lambda = \Lambda_b \Lambda_a$: $q \mapsto q + 2(b - a)$. Следовательно, функция $\dot{q}'(t) = \dot{q}(t) + 2(b - a)$ — решение уравнений (1.1). Предположим для определенности, что $q(0) = a$. Согласно лемме 1, в некоторый момент времени τ функция $q(\tau)$ равна $c = \Lambda_b a = a + 2(b - a)$ и $\dot{q}'(0) = \dot{q}'(\tau)$. Поскольку система автономна, то функция $q''(t) = q(t + \tau)$ — тоже решение уравнений (1.1). Так как $q'(0) = q''(0)$ и $\dot{q}'(0) = \dot{q}''(0)$, то $\dot{q}'(t) = \dot{q}''(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

2). Предположим, что $q(t_1) = a$, $q(t_2) = b$ и $t_2 > t_1$. Достаточно, очевидно, показать, что $q'(t) \neq 0$ в интервале (t_1, t_2) . Предположим противное, т. е. что в некоторый момент $\tau \in (t_1, t_2)$ скорость $q'(\tau) = 0$. Так как система (1.1) обратима, то в последующие моменты времени точка q будет двигаться по той же траектории, но в обратную сторону (см., например, [1]). В этом случае, согласно лемме 1, решение $q(t)$ будет либрацией, траектория которой не содержит точку b . Но это противоречит предположениям леммы 2.

Согласно принципу наименьшего действия в форме Якоби, траектории решений уравнений (1.1) внутри области возможных движений D — геодезические линии метрики $dp = [h + V(q)]^{1/2} ds$, где ds — риманова метрика на \mathbb{R}^n , задающая кинетическую энергию (т. е. $T = (ds/dt)^2/2$). Расстоянием $d(a, b)$ между точками $a, b \in D$ назовем минимальную длину в метрике dp кусочно-гладких кривых из области D с концами в точках a и b . Расстоянием от точки $a \in D$ до границы ∂D назовем величину

$$\partial(a) = \inf_{b \in \partial D} d(a, b)$$

(подробности см. в работе [4]). Будем считать, что на границе ∂D нет положений равновесия рассматриваемой системы.

Лемма 3. Для любой точки a компактной области D существует решение $q(t)$ уравнений (1.1), такое, что $q(0) = a$, $q(\tau) \in \partial D$, и длина несамопересекающейся кривой $q(t)$, $t \in [0, \tau]$ равна в точности $\partial(a)$.

Лемма 4. Если $d(a, b) < \partial(a) + \partial(b)$, то существует решение $q(t)$ уравнений (1.1), такое, что $q(t_1) = a$, $q(t_2) = b$, и длина несамопересекающейся кривой $q(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ равна в точности $d(a, b)$.

Доказательство лемм 3 и 4 содержится в работе [4].

Из лемм 1 и 3 вытекает

Утверждение 1. Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) область $D \in \mathbb{R}^n$ компактна;
- 2) на границе ∂D нет положений равновесия;
- 3) система инвариантна относительно отражения Λ_a ($a \in D \setminus \partial D$).

Тогда в области D существует либрация, траектория которой проходит через точку a .

В качестве приложения рассмотрим задачу [5] о периодических колебаниях в нелинейной системе, описываемой уравнениями

$$(2.1) \quad m_1 x'' = f(x) - F(x-y), \quad m_2 y'' = g(y) + F(x-y) \quad (m_1, m_2 > 0)$$

Функции f , g и F предполагаются нечетными.

Систему (2.1) можно записать в виде уравнений Лагранжа с лагранжианом

$$L = 1/2 (m_1 x'^2 + m_2 y'^2) + V(x, y)$$

$$V = \int f(x) dx + \int g(y) dy - \int F(x-y) d(x-y)$$

Периодические решения, проходящие через точку $x = y = 0$ и имеющие с границей области возможных движений две общие точки, названы [5] колебаниями нормального типа. Их существование установлено лишь в некоторых частных случаях, например, когда $m_1 = m_2$ и $f \equiv g$.

Можно проверить, что функция V инвариантна относительно отражения Λ_0 плоскости $\mathbb{R}^2 \{x, y\} : (x, y) \mapsto (-x, -y)$. Если множество $\{h + V \geq 0\}$ компактно, то, согласно утверждению 1, при некритических значениях полной энергии h всегда суще-

ствуют колебания нормального типа (либрации) системы (2.1). Возможно, что в случае, когда область $\{h + V \geq 0\}$ гомеоморфна диску, таких колебаний по крайней мере два.

3. Периодические колебания n -звенного маятника. Положим

$$h^- = \min_{T^n} V, \quad h^+ = \max_{T^n} V$$

Утверждение 2. Пусть h — некритическое значение из интервала (h^-, h^+) . Через каждую критическую точку потенциала V , лежащую внутри области $\{h + V(q) \geq 0\} \subset T^n$, проходит хотя бы одна траектория либрационного периодического решения. Причем решения, проходящие через разные критические точки, различны.

Следствие. Если h — некритическое значение из интервала (h^-, h^+) , то количество различных либраций в области $D = \{h + V \geq 0\}$ не меньше числа критических точек внутри D .

Поскольку точка $q = (0, \dots, 0) \in D$ для всех $h \geq h^-$, то при $h^- < h < h^+$ либрации n -звенного маятника всегда существуют. При значениях $h < h^+$ и достаточно близких к h^+ в области D различных либраций по крайней мере $2^n - 1$.

Замечание. Эти утверждения усиливают оценки числа различных либраций n -звенного маятника, полученные в работе [6].

Доказательство утверждения 2. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ — критическая точка потенциала V . Можно показать, что кинетическая энергия $T(q, \dot{q})$ и потенциал $V(q)$ инвариантны относительно отражения Λ_a . Согласно лемме 3, точку $a \in \{h + V \geq 0\} \subset T^n$ можно соединить с некоторой точкой границы отрезком минимальной геодезической γ_a . Этой кривой отвечает геодезическая Γ_a метрики Якоби в области $\{h + V \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$, соединяющая точку $a \in \mathbb{R}^n$ с некоторой точкой ∂D . Положим $\Gamma_a' = \Lambda_a \Gamma_a$. Согласно лемме 1, кривая $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_a'$ — траектория некоторой либрации в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Кривой Γ естественным образом соответствует кривая γ на торе T^n , которая является искомой либрацией, проходящей через точку $a \in T^n$. Либрации, проходящие через разные критические точки, различны, поскольку в противном случае (по лемме 2) скорость движения никогда в нуль не обращается.

Рассмотрим случай, когда $h > h^+$. Так как в этом случае $\partial D = \emptyset$, то периодические движения могут быть только вращениями. Исследуем вопрос о существовании периодических вращений n -звенного маятника, при которых k -е звено за период вращения сделает N_k полных оборотов (N_1, \dots, N_n — фиксированные целые числа). Такие движения назовем вращениями, принадлежащими типу $[N_1, \dots, N_n]$.

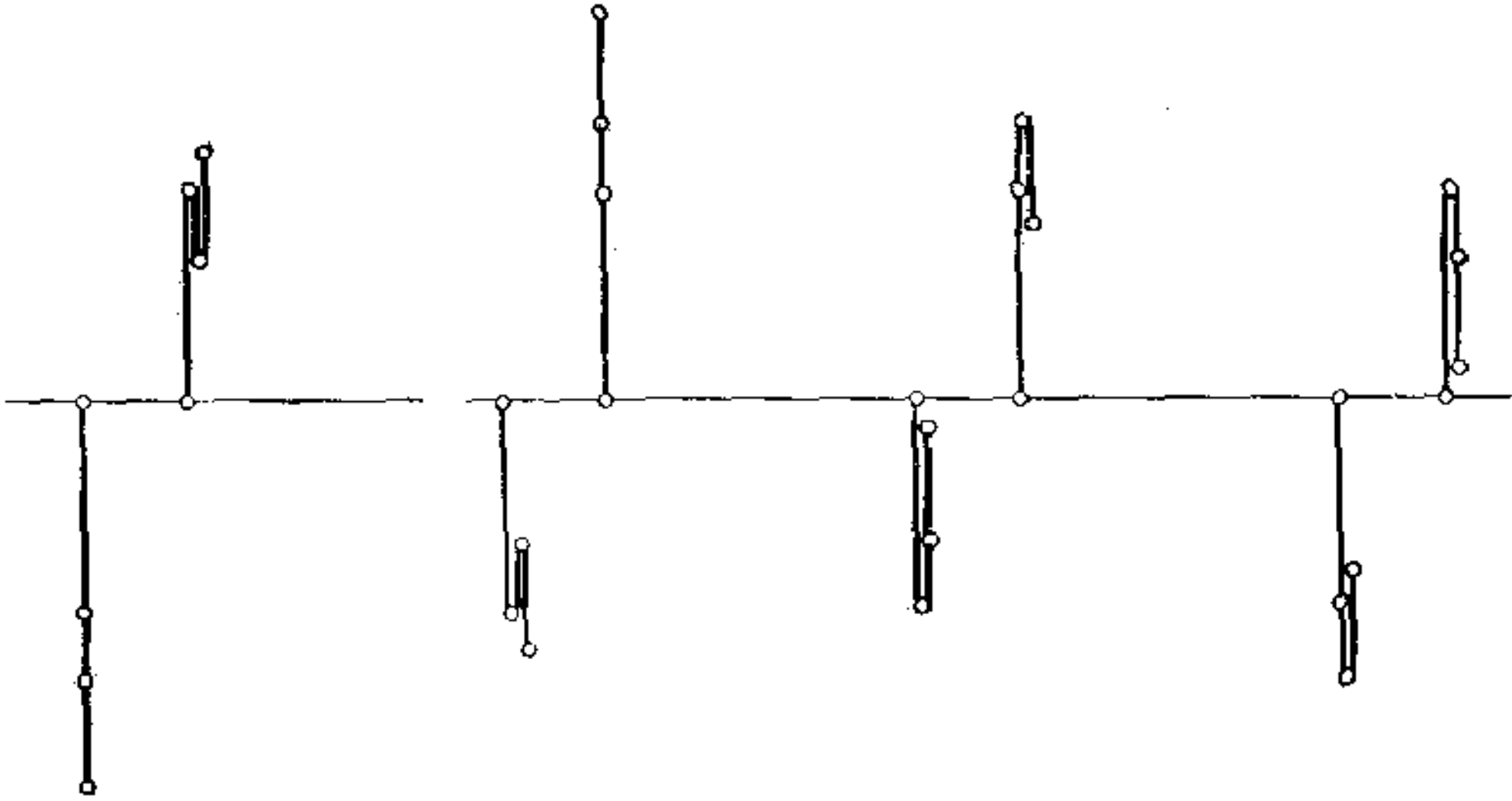
Утверждение 3. Для любых фиксированных целых чисел N_1, \dots, N_n и любого $h > h^+$ существует 2^{n-1} различных периодических вращений типа $[N_1, \dots, N_n]$ с запасом полной энергии, равным h , траектории которых на T^n проходят через пары критических точек потенциала V .

Доказательство. Предположим сначала, что числа N_1, \dots, N_n взаимно просты. Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^n пару критических точек a' и a'' потенциала V , q_k -координаты которых различаются на πN_k . Эти точ-

ки, рассматриваемые как точки на \mathbb{T}^n , различны. Пусть, например

$$\mathbf{a}' = (m_1' \pi, \dots, m_n' \pi), \quad \mathbf{a}'' = (m_1'' \pi, \dots, m_n'' \pi)$$

Если $h > h^+$, то риманово пространство (\mathbb{R}^n, dp) полно [7] и, следовательно, по теореме Хопфа—Ринова, точки \mathbf{a}' и \mathbf{a}'' можно соединить кратчайшей геодезической. Этой кривой соответствует решение $\mathbf{q}(t)$ уравнений (1.1), такое, что $\mathbf{q}(t') = \mathbf{a}'$, $\mathbf{q}(t'') = \mathbf{a}''$ ($t'' > t'$). Поскольку задача



Фиг. 2

инвариантна относительно отражений $\Lambda_{\mathbf{a}'}$ и $\Lambda_{\mathbf{a}''}$, то по лемме 2 существует число $\tau > 0$, такое, что

$$\mathbf{q}(t + \tau) - \mathbf{q}(t) = 2(\mathbf{a}'' - \mathbf{a}') = (2N_1\pi, \dots, 2N_n\pi)$$

$$N_1 = m_1'' - m_1', \dots, N_n = m_n'' - m_n'$$

Следовательно, траектория соответствующего решения на торе \mathbb{T}^n замкнута, и это решение — периодическое вращение типа $[N_1, \dots, N_n]$ с периодом τ . Поскольку числа N_1, \dots, N_n взаимно просты, то τ — наименьший период решения $\mathbf{q}(t)$ и остальные периоды ему кратны.

Предположим, что найденное решение $\mathbf{q}(t)$ проходит через критическую точку \mathbf{c} . Тогда, согласно лемме 2, существуют τ' и τ'' , такие, что

$$\mathbf{q}(t + \tau') - \mathbf{q}(t) = 2(\mathbf{c} - \mathbf{a}'), \quad \mathbf{q}(t + \tau'') - \mathbf{q}(t) = 2(\mathbf{c} - \mathbf{a}'')$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, τ' и τ'' — периоды этого решения, кратные τ , причем $\tau' - \tau'' = \tau$. Отсюда вытекает существование целого числа p , такого, что $\mathbf{c} - \mathbf{a}' = (pN_1\pi, \dots, pN_n\pi)$. Тогда $\mathbf{c} - \mathbf{a}'' = ((p-1)N_1\pi, \dots, (p-1)N_n\pi)$. Значит, точка \mathbf{c} , рассматриваемая как точка n -мерного тора \mathbb{T}^n , совпадает с одной из точек $\mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in \mathbb{T}^n$.

Итак, все критические точки потенциала V , лежащие на \mathbb{T}^n , разбиваются на пары, через которые проходят траектории периодических вращений типа $[N_1, \dots, N_n]$, причем эти траектории не содержат критических точек из других пар. Поскольку общее число критических точек равно 2^n , то количество различных вращений маятника, принадлежащих данному типу, — 2^{n-1} .

Предположим] теперь, что числа N_1, \dots, N_n не взаимно просты и $p > 1$ — их наибольший общий делитель. Положим $N_1 = pN_1', \dots$

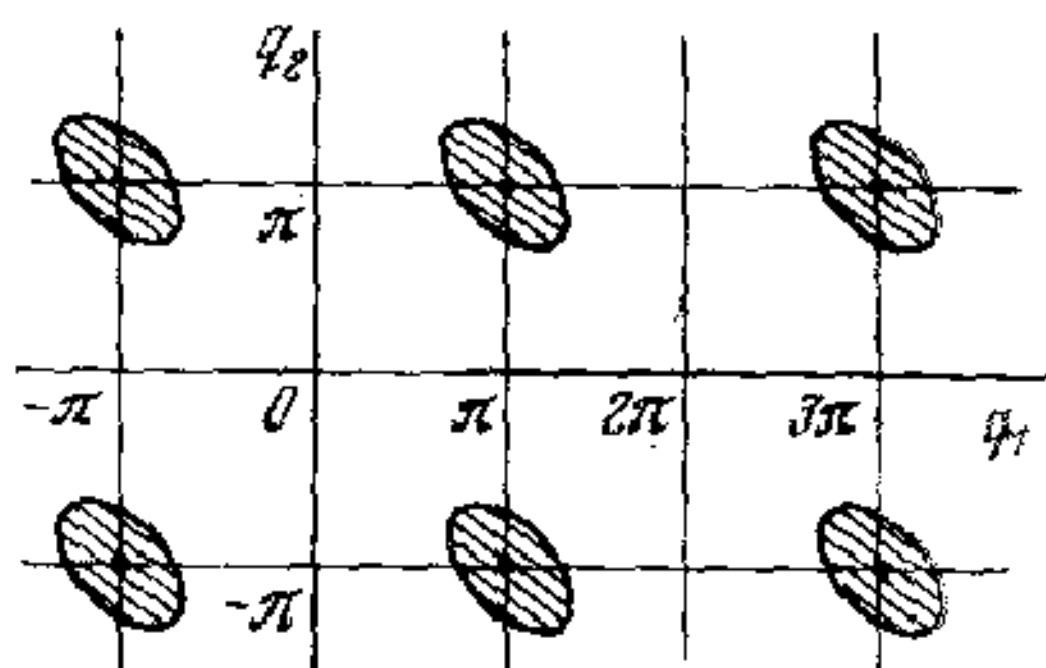
... , $N_n = pN_n'$. Согласно только что доказанному, существует 2^{n-1} различных вращений типа $[N_1', \dots, N_n']$. Рассмотрим периодические вращения, получающиеся из решений типа $[N_1', \dots, N_n']$ p -кратным увеличением периода. Они все различны и принадлежат, очевидно, типу $[N_1, \dots, N_n]$. Утверждение доказано.

На фиг. 2 изображены четыре пары положений равновесия маятника, которые занимает трехзвенный маятник при различных периодических вращениях типа [1,2,3].

В заключение покажем, что при некоторых условиях периодические вращения маятника существуют и при значениях $h < h^+$. Для этого рассмотрим двойной маятник с одинаковой длиной стержней l , их масса сосредоточена в точках O_1 и O_2 и равна соответственно m_1 и m_2 . Можно показать, что

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{q}_2^2 + m_2 l^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos (q_1 - q_2)$$

$$V = m_1 g l \cos q_1 + m_2 g l (\cos q_1 + \cos q_2)$$



Фиг. 3

Рассмотрим случай, когда величина h достаточно близка к h^+ . Область возможных движений на плоскости $R^2 \{q_1, q_2\}$ изображена на фиг. 3 (она не заштрихована). Зафиксировав значение m_1 , устремим массу m_2 к нулю. При достаточно малых значениях m_2 расстояние между точками $a = (0, 0)$ и $b = (0, \pi)$ меньше суммы расстояний от этих точек до границы области возможных движений.

Действительно, $d(a, b)$ не превосходит длины отрезка $\{q_1 = 0, q_2 \in [0, \pi]\} \subset R^2$, которая равна

$$\sqrt{m_2} l \int_0^\pi [h + m_1 g l + m_2 g l (1 + \cos q_2)]^{1/2} dq_2$$

Эта величина стремится к нулю при $m_2 \rightarrow 0$. При малых значениях m_2 область возможных движений мало отличается от области $\{h + m_2 g l \cos q_1 \geq 0\}$. Следовательно

$$\lim_{m_2 \rightarrow 0} \vartheta(a) = \frac{\sqrt{m_1} l}{2} \oint [h + m_1 g l \cos q_1]^{1/2} dq_1 > 0$$

Значит, при малых m_2 выполнено неравенство $d(a, b) < \vartheta(a) + \vartheta(b)$.

По лемме 4 существует кратчайшая геодезическая метрики dp , соединяющая точки a и b и лежащая внутри области возможных движений. Этой геодезической отвечает решение уравнений (1.1), лежащее на уровне интеграла энергии с постоянной h . Так как система инвариантна относительно отражений Λ_a и Λ_b , то, согласно лемме 2, найденное решение — периодическое вращение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bradistilov G.* Über periodische und asymptotische Lösungen beim n -fachen Pendel in der Ebene. Math. Ann., 1938, Bd 116, H 2.
2. *Зейферт Г., Трельфалль В.* Топология. М.—Л., Гостехиздат, 1938.
3. *Козлов В. В.* Принцип наименьшего действия и периодические решения в задачах классической механики. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
4. *Козлов В. В.* О геометрии областей возможных движений с краем. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1977, № 5.
5. *Rosenberg R. M.* Normal modes of non-linear dual-mode systems. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, No. 2. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1961, № 5.)
6. *Болотин С. В., Козлов В. В.* Либрации в системах со многими степенями свободы, ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.
7. *Мианор Дж.* Теория Морса. М., «Мир», 1965.