ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1979

ТОМ 249 № 6

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

Определение 4. Назовем вершину z_k границы Γ области D недопустимой, если в ней стыкуются компоненты l_k и l_{k+1} так, что любые две достаточно малые хорды, проведенные из z_k к точкам разных компонент, находятся вне $\bar{D}$, за исключением своих концов, и все точки наибольшего из образованных ими углов лежат вне D вблизи z_k.

Теорема 9. *Пусть жорданова кривая* $\Gamma \in G$ *и не имеет недопустимых вершин и* $\{\lambda_n\}$ – *произвольная последовательность точек* Γ.

Тогда ряд Дирихле вида (3) *имеет в.р.р.*

Идея доказательства теоремы 9 основана на связи между функциями $\varphi(w)$ и $f(z)$. Преобразование P_φ в P_f позволяет переходить от малой дуги компоненты γ_j или l_k, предварительно подвергнутой некоторому линейному преобразованию $z = aw + b$, не нарушающему в.р.р. функции, к строго выпуклой дуге. Доказательство же п.р.р. преобразованного ряда Дирихле со спектром $\{e^{a\lambda_n + b}\}$ на такой дуге сравнительно несложно. Затем с помощью теоремы 3 мы возвращаемся к исходному ряду (3).

Теорема 9 обобщает результат Б.Я. Левина о п.р.р. ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$, когда λ_n лежат на границе выпуклой области ([1], стр. 341), причем применяемый здесь метод доказательства ввиду перехода к строго выпуклым дугам принципиально проще, поскольку отпадает необходимость использования сложного аппарата почти-периодических функций.

Кубанский государственный университет,
Краснодар

Поступило
6 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б.Я. Левин*, Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956. [2] *Л. Бибербах*, Аналитическое продолжение, М., "Наука", 1967. [3] *А.И. Маркушевич*, Избранные главы теории аналитических функций, М., "Наука", 1976. [4] *Н.В. Говоров*, *Н.М. Черных*, Изв. АН СССР, сер. матем., № 5, 965 (1978). [5] *В.И. Черноляс*, ДАН, т. 234, № 4, 772 (1977).

УДК 531.01

МАТЕМАТИКА

В.В. КОЗЛОВ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ К ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НАТУРАЛЬНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 1 VI 1979)

1. Рассмотрим натуральную механическую систему, конфигурационное пространство которой M является двумерным ориентируемым аналитическим компактным многообразием. Как обычно, через T_xM обозначим касательную плоскость к многообразию M в точке $x \in M$. Фазовое пространство системы – касательное расслоение

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

– имеет естественную структуру четырехмерного аналитического многообразия. Кинетическая энергия системы K – аналитическая функция на TM, являющаяся положительно-определенной квадратичной формой на каждой касательной плоскости $T_x M$. Потенциал силового поля П – аналитическая функция на M. Движения механической системы – аналитические функции $x(t) \in M$, $t \in \mathbf{R}$, удовлетворяющие в локальных координатах $x \in M$ уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad L = K + \Pi, \qquad \dot{x} = v \in T_x M.$$

Эти уравнения имеют первый интеграл – интеграл энергии

$$K - \Pi = h = \text{const}.$$

Теорема 1. *Если род многообразия M отличен от 0 и 1, то уравнения движения не имеют первого интеграла, аналитического на TM и независимого от интеграла энергии.*

Это утверждение дает право говорить о топологических препятствиях к интегрируемости натуральных аналитических систем. Хорошо известны многочисленные примеры интегрируемых систем, конфигурационное многообразие которых гомеоморфно двумерным сфере и тору.

Теорема 1 является следствием более общего утверждения, устанавливающего неинтегрируемость уравнений движения при фиксированных достаточно больших значениях полной энергии. Точная формулировка состоит в следующем. При всех $h > \max_M(-\Pi)$ уровень полной энергии $\Sigma_h = \{ K - \Pi = h \}$ является трехмерным аналитическим многообразием, на котором естественным образом возникает аналитическая система дифференциальных уравнений. Эту систему будем называть пониженной. Справедлива

Теорема 2. *Если род поверхности M не равен 0 и 1, то при всех $h > \max_M(-\Pi)$ пониженная система не имеет первого интеграла, аналитического на всем Σ_h.*

2. Доказательство теоремы 2. Согласно принципу наименьшего действия, траектории движений механической системы, лежащие на уровнях Σ_h с запасом полной энергии $h > \max(-\Pi)$, является геодезическими линиями риманова пространства (M, ds), где метрика ds определяется по формуле $(ds)^2 = 2(h + \Pi)K(dt)^2$.

Зафиксируем точку $x \in M$. Поскольку (M, ds) – гладкое двумерное компактное ориентируемое риманово многообразие, негомеоморфное сфере, то по теореме Е.В. Гайдукова ([1]) для любого нетривиального класса свободно гомотопных путей на M существуют геодезические полутраектории Г, выходящие из точки x и асимптотически приближающиеся к некоторой замкнутой геодезической из данного гомотопического класса. Геодезическая Г сама может быть замкнутой кривой. Геодезические полутраектории Г будем называть в дальнейшем Γ_x-геодезическими.

Если пониженная система имеет первый аналитический интеграл $f_x(v)$, то его любой некритический уровень есть объединение некоторого числа двумерных инвариантных торов (см., например, ([2],[3])). Рассмотрим в касательной плоскости окружность S_x, состоящую из векторов v таких, что $K_x(v) - \Pi(x) = h$. Каждому вектору $v \in S_x$ соответствует единственное движение $x(t)$ с начальными условиями $x(0) = x$, $\dot{x}(0) = v$. На этом движении функция f постоянна. Скорость $v \in S_x$ назовем критической, если соответствующее значение $f_x(v)$ является критическим. Покажем, что существует бесконечно много различных критических скоростей. Если число критических скоростей конечно, что окружность S_x разбивается на конечное число открытых секторов $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ таких, что любая скорость $v \in \Delta_i$, $i = 1, \ldots, n$, является некритической. Будем считать, что на интервалах $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ функция $f_x(v)$ монотонна; в противном случае эти интервалы можно разбить на конечное число интервалов монотонности $f_x(v)$.

Каждому вектору $v \in \Delta_i$ можно поставить в соответствие единственный инвариантный тор T_v^2, на котором лежит движение $x(t)$: $x(0) = x$, $\dot{x}(0) = v$. Поскольку среди значений функции $f_x(v)$ при $v \in \Delta_i$ нет критических, то объединение

$$D_i = \bigcup_{v \in \Delta_i} T_v^2 \subset \Sigma_h$$

диффеоморфно прямому произведению $\Delta_i \times T^2$ ([4]). Пусть p: $TM \to M$ – проекция касательного расслоения TM на M. Положим $X_i = p(D_i) \subset M$. Непрерывное отображение p: $D_i \to X_i$ индуцирует гомоморфизм групп гомологий g_i: $H_1(D_i) \to H_1(X_i)$. Так как $X_i \subset M$, то существует естественный гомоморфизм φ_i: $H_1(X_i) \to H_1(M)$. Обозначим через G_i подгруппу группы $H_1(M)$, являющуюся образом группы $H_1(D_i)$ при гомоморфизме $\varphi_i \circ g_i$: $H_1(D_i) \to H_1(M)$. Элементы группы $H_1(M)$ являются классами гомологичных циклов и в каждом классе есть связный цикл. Свободно гомотопные циклы, очевидно, гомологичны. При некоторых критических начальных скоростях Γ_x-геодезические могут оказаться незамкнутыми. Эти геодезические наматываются на некоторые циклы γ, порождающие одномерные подгруппы $\{n\gamma,\ n \in Z\} \subset H_1(M)$. Число таких групп, очевидно, конечно; обозначим их $N_1, \ldots, N_m$. Если $\alpha \in H_1(M)$ не лежит в объединении $N_1 \cup \ldots \cup N_m$, то в классе гомологичных циклов α содержится некоторая из замкнутых Γ_x-геодезических. Поскольку при отображении p в Γ_x-геодезические переходят некоторые замкнутые кривые в областях $D_1, \ldots, D_n \subset \Sigma_h$, то множество $H_1(M) \setminus \cup N_i$ целиком покрыто подгруппами $G_1, \ldots, G_n$. Так как $H_1(D_i) \approx Z^2$, $i = 1, \ldots, n$, то G_i – коммутативные группы, ранг которых не превосходит двух. Хорошо известно, что если род поверхности M равен g, то $H_1(M) \approx Z^{2g}$ ([5]). Поскольку M негомеоморфно сфере и тору, то $2g \geqslant 4$, и из соображений размерности следует, что $H_1(M)$ нельзя покрыть конечным числом одномерных и двумерных подгрупп. Полученное противоречие доказывает бесконечность количества критических скоростей.

Так как число различных критических значений аналитической функции на компактном аналитическом многообразии конечно ([6]), то аналитическая функция $f_x(v)$ при фиксированном значении $x \in M$ бесконечно много раз принимает одно и то же значение. Следовательно, $f_x(v)$ не зависит от v. Многообразие M связно и компактно, значит, любые две его точки можно соединить хотя бы одной геодезической ([4]). Поскольку функция f постоянна вдоль каждого движения, то $f \equiv \text{const}$.

Теорема доказана.

3. Заключительные замечания. Из доказательства теоремы 2 легко получить, что если компактное ориентируемое гладкое многообразие M негомеоморфно сфере и тору, то уравнения движения не имеют нового интеграла $f_x(v)$, являющегося гладкой функцией в TM, аналитической при фиксированных $x \in M$ на T_xM и имеющей конечное число различных критических значений. Полиномиальные по скоростям интегралы представляют распространенный пример интегралов, аналитических в касательных плоскостях T_xM. Количество различных критических значений гладкой функции конечно, если, например, все критические точки изолированы (в частности, невырождены).

Случай неориентируемого многообразия M представляет меньший интерес. Если M гомеоморфно проективной плоскости и бутылке Клейна, то на M существуют интегрируемые натуральные системы. Теоремы 1, 2 будут справедливы и для неориентируемых многообразий, род которых отличен от 1 и 2.

Теоремы 1, 2 естественно приводят к следующей задаче: накладывает ли существование новых аналитических интегралов ограничение на топологию аналитического многообразия M в случае, когда $\dim M > 2$? В частности, любое ли многомерное аналитическое многообразие может быть конфигурационным пространством вполне интегрируемой аналитической натуральной механической системы?

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
7 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Е.В. Гайдуков*, ДАН, т. 169, № 5 (1966). [2] *А.Н. Колмогоров*, В кн.: Международн. математический конгресс в Амстердаме, 1954 г., 1961. [3] *В.И. Арнольд*, Математические методы классической механики, 1974. [4] *Дж. Милнор*, Теория Морса, 1965. [5] *А. Дольд*, Лекции по алгебраической топологии, 1976. [6] *J. Souček, V. Souček*, Comment. Math. Univ. Carol., v. 13, № 1 (1972).

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР М.М. ЛАВРЕНТЬЕВ, К.Г. РЕЗНИЦКАЯ

ОДНА ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С НЕИЗВЕСТНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Пусть $U(x, y, z, t)$ – решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - q(z)\,U + f(t)\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z); \tag{1}$$

$$U\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \tag{2}$$

где $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$, $z \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $\delta(\alpha)$ есть дельта-функция Дирака,

$$f(0) = 1, \quad f(t) > 0, \quad q(0) = a, \quad q(z) > 0, \quad a = \text{const}, \quad a > 0.$$

Пусть

$$U(x, y, z, t)\Big|_{x = x_i,\ y = y_i,\ z = 0} = U(\rho_i, 0, t), \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

$(x_i, y_i, 0)$ – фиксированные точки пространства,

$$\rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2, \quad \rho_1 > \rho_2 > 0, \tag{4}$$

ρ_i, a – известные числа.

Известными в рассматриваемой в настоящей заметке задаче будут функции (3), т.е. $U(\rho_i, 0, t)$, искомыми – функции $q(z)$ и $f(t)$. Так сформулированная задача – обратная задача для уравнения (1) с неизвестной формой сигнала. Если $q(z)$ и $f(t)$ известны, а ищется $U(x, y, z, t)$ – это прямая задача.