УДК 531.31+517.51

В. В. Козлов

ОБ ИНТЕГРАЛАХ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть T^n — n-мерный тор с угловыми координатами $\varphi=(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \bmod 1$. Рассмотрим квазипериодическое движение на T^n:

$$\varphi = \omega t + \varphi^0, \qquad \varphi^0 = \varphi(0), \tag{1}$$

где $\omega=(\omega_1, \dots, \omega_n)=\mathrm{const}$. Предположим, что частоты $\omega_1, \dots, \omega_n$ независимы над полем рациональных чисел. Пусть $f(\varphi)$ — непрерывная функция на T^n. Рассмотрим интеграл от f вдоль траекторий квазипериодического движения (1):

$$I(t, \varphi^0) = \int_0^t f(\omega t + \varphi^0)\, dt. \tag{2}$$

По теореме об усреднении [1],

$$I(t, \varphi^0) = \lambda t + \Phi(t, \varphi^0),$$

$$\lambda = \bar{f} = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)\, d\varphi_1 \dots d\varphi_n, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t, \varphi^0)}{t} = 0$$

$$\forall \varphi^0 \in T^n.$$

В заметке рассматривается поведение $\Phi(t, \varphi^0)$ как функции времени в зависимости от начальных фаз $\varphi^0=(\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0)$.

§ 1. Уточнение одной теоремы Боля [2].

Теорема 1. Пусть частоты $\omega_1, \dots, \omega_n$ независимы. Тогда существует точка $\varphi^0 \in T^n$, такая, что

$$I(t, \varphi^0) - \lambda t \geqslant 0 \; (\leqslant 0) \quad \forall t \in R \tag{3}$$

и $f(\varphi^0)=\lambda$.

Замечание. Уточнение теоремы Боля [2] состоит в том, что начальные фазы $\varphi^0=(\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0)$, для которых справедливы неравенства (3), существуют на множестве $\{\varphi \in T^n : f(\varphi)=\lambda\}$.

Лемма 1. Теорема 1 справедлива для тригонометрических многочленов.

Доказательство. Так как частоты независимы, то для любого тригонометрического многочлена $f(\varphi)$ со средним значением λ найдется многочлен $g(\varphi)$, такой, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial \varphi_i} \omega_i = f - \lambda. \tag{4}$$

Тогда

$$I(t,\ \varphi)=\int_0^t f(\omega t+\varphi)\,dt=\lambda t+g(\omega t+\varphi)-g(\varphi).$$

Пусть $g(\varphi)$ имеет минимум (максимум) в точке $\varphi=\varphi^0$. Тогда

$$I(t,\ \varphi^0)-\lambda t\geqslant 0\ (\leqslant 0)\ \forall\, t\in R$$

и $\partial g/\partial\varphi_l=0$ при $\varphi_l=\varphi_l^0$ $(l=1,\ \ldots,\ n)$. Учитывая равенство (4), получаем, что $f(\varphi^0)=\lambda$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Для любой непрерывной функции $f(\varphi)$ существует последовательность тригонометрических многочленов $P_m(\varphi)$, такая, что

$$\max_{\varphi\in T^n}|f(\varphi)-P_m(\varphi)|\to 0$$

при $m\to\infty$. Обозначим через λ и λ_m фазовые средние функций f и P_m. По лемме 1 существуют начальные фазы φ_m^0, при которых

$$I_m(t,\ \varphi_m^0)=\int_0^t P_m(\omega t+\varphi_m^0)\,dt\geqslant\lambda_m t\ (\leqslant\lambda_m t)\quad\forall\, t\in R$$

и $P_m(\varphi_m^0)=\lambda_m$. Так как T^n — компакт, из последовательности $\varphi_m^0 (m=1,\ 2\ldots)$ можно выбрать последовательность $\varphi_{m_k}^0 (k=1,\ 2\ldots)$, сходящуюся к некоторой точке $\varphi^0\in T^n$. При фиксированном $t\in R$

$$\lim_{k\to\infty} I_{m_k}(t,\ \varphi_{m_k}^0)=I(t,\ \varphi^0)$$

и

$$\lim_{k\to\infty} P_{m_k}(\varphi_{m_k}^0)=f(\varphi^0).$$

Так как $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_m=\lambda$, то

$$I(t,\ \varphi^0)-\lambda t\geqslant 0\ (\leqslant 0)\ \forall\, t\in R$$

и $f(\varphi^0)=\lambda$. Теорема доказана.

§ 2. Теорема о нулях. В этом параграфе рассматриваем простейший нетривиальный случай, когда $n=2$. Интеграл (2) запишем следующим образом:

$$I(t,\ \varphi_1^0,\ \varphi_2^0)=\int_0^t f(\omega_1 t+\varphi_1^0,\ \omega_2 t+\varphi_2^0)\,dt. \tag{5}$$

Без ущерба общности можно считать, что $\lambda=\bar f=0$, так как общий случай сводится к этому, если ввести функцию $g=f-\lambda$.

Приведем два вспомогательных утверждения, которые будут использованы в дальнейшем. Пусть $F(\varphi)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на окружности $S^1\{\varphi \bmod 1\}$ с нулевым средним, то есть

$$\int_0^1 F(\varphi)\,d\varphi=0.$$

Пусть γ — иррациональное число. Положим

$$\sigma(n, \varphi_0) = \sum_{k=0}^{n-1} F(k\gamma + \varphi_0).$$

Все иррациональные числа разобьем на два класса. Класс K_1 составляют такие числа γ, для которых неравенство

$$|n\gamma - m| < |n|^{-3/2}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах (m и n, конечно, можно считать взаимно-простыми). Остальные числа отнесем к классу K_2.

Лемма 2. Если $\gamma \in K_2$, то существует непрерывная функция $\Phi(\varphi)$ на S^1, такая, что

$$\sigma(n, \varphi_0) = \Phi(n\gamma + \varphi_0) - \Phi(\varphi_0).$$

Лемма 3. Пусть $\gamma \in K_1$ и $|N\gamma - m| < N^{-3/2}$. Тогда

$$|\sigma(N, \varphi_0)| < \frac{M_1}{\sqrt{N}} + \frac{M_2}{24N}, \qquad M_1 = \max_{\varphi\in S^1} |F'(\varphi)|, \qquad M_2 = \max_{\varphi\in S^1} |F''(\varphi)|.$$

Доказательство этих утверждений содержится в заметке [3]. Там же доказано, что если $f \in C^2(T^2)$, то движение, описываемое интегралом (5), «устойчиво по Пуассону»:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall T > 0 \ \exists \tau > T : |I(\tau, \varphi_1^0, \varphi_2^0)| < \varepsilon.$$

Теорема 2. Пусть f непрерывна и имеет две непрерывные производные по φ_2, $\lambda = 0$, а отношение частот ω_1/ω_2 иррационально. Если $f(\varphi_1^0, \varphi_2^0) \neq 0$, то

$$\forall T > 0 \ \exists t_1, t_2 > T : I(t_1, \varphi_1^0, \varphi_2^0) > 0, \quad I(t_2, \varphi_1^0, \varphi_2^0) < 0.$$

Следствие (теорема о нулях). Пусть выполнены условия теоремы 2. Если $f(\varphi_1^0, \varphi_2^0) \neq 0$, то функция $I(t, \varphi_1^0, \varphi_2^0)$ имеет бесконечно много нулей при $t \to \infty$.

Доказательство теоремы 2. Расстояние $d\{a_1, a_2\}$ между точками $a_1, a_2 \in T^2$ будем определять в метрике

$$ds^2 = d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2.$$

Докажем сначала, что

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \quad \forall T > 0 \ \exists \tau : |I(\tau, \varphi_1^0, \varphi_2^0)| < \varepsilon, \\ d\{(\omega_1\tau + \varphi_1^0, \omega_2\tau + \varphi_2^0), \ (\varphi_1^0, \varphi_2^0)\} < \varepsilon. \end{gathered} \tag{6}$$

Рассмотрим на T^2 окружность $S^1 = \{(\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_1 = \varphi_1^0\}$ и на ней функцию

$$F(x, \varphi_1^0) = \int_0^{\omega_1^{-1}} f(\omega_1 t + \varphi_1^0, \omega_2 t + x)\, dt.$$

Так как за время t, кратное ω_1^{-1}, точка $(\omega_1 t + \varphi_1^0, \omega_2 t + \varphi_2^0)$ снова вернется на S^1, то

$$I(n\omega_1^{-1}, \varphi_1^0, \varphi_2^0) = \sum_{k=0}^{n-1} F(k\gamma + \varphi_2^0, \varphi_1^0), \quad \gamma = \omega_2/\omega_1.$$

Функция $F\in C^2(S^1)$ и

$$\int_0^1 F(x, \varphi_1^0)\,dx=0.$$

Предположим, что $\gamma\in K_2$. По лемме 1 для фиксированного φ_1^0 существует непрерывная функция $\Phi(x)$ на S^1, такая, что

$$I(n\omega_1^{-1}, \varphi_1^0, \varphi_2^0)=\Phi(n\gamma+\varphi_2^0)-\Phi(\varphi_2^0).$$

Так как точки на S^1 с угловыми координатами $n\gamma+\varphi_2^0$ всюду плотны, для случая $\gamma\in K_2$ утверждение (6) доказано.

Если $\gamma\in K_1$, то по лемме 2 существует бесконечно много натуральных чисел N, удовлетворяющих при некоторых целых m неравенству

$$|N\gamma-m|<N^{-3/2}$$

и таких, что

$$|I(N\omega_1^{-1}, \varphi_1^0, \varphi_2^0)|<\frac{M_1}{\sqrt{N}}+\frac{M_2}{24N}, \quad M_1=\max_{x\in S^1}|F'(x)|, \quad M_2=\max_{x\in S^1}|F''(x)|. \tag{7}$$

При этом точка $(\omega_1\tau+\varphi_1^0, \omega_2\tau+\varphi_2^0)$, $\tau=N\omega_1^{-1}$, отстоит от $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$ на расстоянии

$$d\leqslant|N\gamma-m|<N^{-3/2}. \tag{8}$$

Так как N может быть выбрано сколь угодно большим, из неравенств (7) и (8) следует утверждение (6). Таким образом, оно доказано полностью.

Обозначим через U_ρ окрестность точки $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$ радиуса $\rho>0$. Пусть, для определенности, $f(\varphi_1^0, \varphi_2^0)>0$. Тогда в некоторой области U_δ функция $f>\alpha>0$ ($\alpha=\text{const}$). Существуют $\varepsilon_0>0$ и $\beta>0$, зависящие от δ, такие, что если в момент времени $t=\tau$ точка

$$(\omega_1\tau+\varphi_1^0, \omega_2\tau+\varphi_2^0)\in U_{\varepsilon_0}, \text{ то } (\omega_1 t+\varphi_1^0, \omega_2 t+\varphi_2^0)\in U_\delta \text{ при } \tau-\beta<t<\tau+\beta.$$

Следовательно, если $\varepsilon<\varepsilon_0$, то согласно утверждению (6) существуют сколь угодно большие τ, такие, что

$$|I(\tau, \varphi_1^0, \varphi_2^0)|<\varepsilon, \quad \dot I(t, \varphi_1^0, \varphi_2^0)=f(\omega_1 t+\varphi_1^0, \omega_2 t+\varphi_2^0)>\alpha$$

при $\tau-\beta<t<\tau+\beta$. Так как постоянные ε_0, α и β не зависят от ε, то при малых ε функция $I(t, \varphi_1^0, \varphi_2^0)$ принимает значения разных знаков в интервале $(\tau-\beta, \tau+\beta)$. Теорема доказана.

§ 3. Контрпример. Покажем, что теорема 2 неверна, если функция f только непрерывна. Точнее, приведем пример, когда $f\in C^0(T^2)$, $f(\varphi_0)\neq 0$, а интеграл $I(t, \varphi^0)>0$ при $t>0$. Идея контрпримера восходит к Пуанкаре [4, 5]. Положим

$$f(\varphi_1, \varphi_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\Lambda}\right)^n\cos 2\pi(u_n\varphi_1+v_n\varphi_2),$$

где $\Lambda=\sqrt{2}+1$, $(\Lambda+1)/2<A<\Lambda$, а целые числа u_n и v_n определимы из разложения

$$(\sqrt{2}-1)^n=u_n+v_n\sqrt{2}.$$

Пусть частоты ω_1, ω_2 равны соответственно $1/2\pi$, $\sqrt{2}/2\pi$, а начальные фазы φ_1^0, φ_2^0 равны нулю. Тогда

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{A}{\Lambda}\right)^n\cos\frac{t}{\Lambda^n},$$

$$I(t)=\int_0^t f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}A^n\sin\frac{t}{\Lambda^n}.$$

Заметим, что $f(\varphi_1^0,\ \varphi_2^0)=f(0,\ 0)>0$.

Предложение 1. Если $1<(\Lambda+1)/2<A\leqslant\Lambda$, то $I(t)>0$ при $t>0$.

Доказательство. Если $0<t\leqslant\pi/2$, то, очевидно, $I(t)>0$. Пусть

$$\frac{\pi}{2}\Lambda^{n-1}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\Lambda^n,\qquad n=1,\ 2,\ldots$$

Тогда

$$0<\frac{\pi}{2\Lambda^{k+1}}\leqslant\frac{t}{\Lambda^{n+k}}\leqslant\frac{\pi}{2\Lambda^k}\leqslant\frac{\pi}{2},\qquad k=0,\ 1,\ 2\ldots$$

Следовательно,

$$\sin\frac{t}{\Lambda^{n+k}}\geqslant\frac{2t}{\pi\Lambda^{n+k}}\geqslant\frac{1}{\Lambda^{k+1}},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^{n+k}\sin\frac{t}{\Lambda^{n+k}}\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{n+k}}{\Lambda^{k+1}}=\frac{A^n}{\Lambda-A}.$$

Если $(\Lambda+1)/2<A<\Lambda$, то

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}A^k\sin\frac{t}{\Lambda^k}\right|<\frac{A^n-1}{A-1}<\frac{A^n}{\Lambda-A}.$$

Значит, в интервале $\left[\frac{\pi}{2}\Lambda^{n-1},\ \frac{\pi}{2}\Lambda^n\right]$

$$I(t)\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}A^{n+k}\sin\frac{t}{\Lambda^{n+k}}-\left|\sum_{k=0}^{n-1}A^k\sin\frac{t}{\Lambda^k}\right|>0.$$

Предложение доказано.

Покажем, что функция f недифференцируема по переменным φ_1 и φ_2. Предположим, что f имеет производную, например, по φ_1. Тогда дифференцируема функция

$$g(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\Lambda}\right)^n\cos 2\pi u_n\varphi.$$

Нетрудно показать, что коэффициенты u_n равны

$$\frac{(-1)^n}{2}\left[\Lambda^n+\frac{(-1)^n}{\Lambda^n}\right].$$

Справедливо

Предложение 2. Если $1<A<\Lambda$, то функция $g(\varphi)$ нигде недифференцируема.

Действительно, разность $g(\varphi)-G(\varphi)$, где

$$G(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\Lambda}\right)^n \cos \pi\Lambda^n\varphi,$$

дифференцируема всюду. Значит, если $g(\varphi)$ имеет производную в точке $\varphi=\varphi'$, то функция $G(\varphi)$ также дифференцируема при $\varphi=\varphi'$. Однако $G(\varphi)$ — классический пример функции, не имеющей производной ни в одной точке [6].

Аналогично доказывается, что функция f недифференцируема по координате φ_2.

§ 4. *Динамические системы с интегральным инвариантом на торе.* Рассмотрим на двумерном торе $T^2\{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 1\}$ систему дифференциальных уравнений

$$\dot\varphi_1=F_1(\varphi_1, \varphi_2), \qquad \dot\varphi_2=F_2(\varphi_1, \varphi_2), \tag{9}$$

обладающую интегральным инвариантом

$$I(D)=\iint_D U(\varphi_1, \varphi_2)\,d\varphi_1 d\varphi_2 \tag{10}$$

(D — измеримая область на T^2). Далее всюду предполагаем, что F_1, F_2, U — аналитические функции на T^2, причем $U>0$, $F_1^2+F_2^2>0$ (последнее неравенство означает отсутствие у системы (9) положений равновесия). Общая теория уравнений (9) восходит к Пуанкаре [4]. Основные результаты более поздних исследований можно найти в книге [7].

Уравнения (9) с интегральным инвариантом (10) часто встречаются при качественном анализе динамических систем. Многочисленные примеры дает

Предложение 3 (ср. с [8]). Рассмотрим автономную систему аналитических дифференциальных уравнений в R^n:

$$\dot x=f(x), \quad x=(x_1, \ldots, x_n), \quad f=(f_1, \ldots, f_n). \tag{11}$$

Предположим, что эта система имеет интегральный инвариант с плотностью $\Delta(x)>0$ и $n-2$ аналитических первых интеграла $F_1(x), \ldots$ $\ldots, F_{n-2}(x)$. Пусть на инвариантном множестве $M=\{x\in R^n : F_1(x)=$ $=c_1, \ldots, F_{n-2}(x)=c_{n-2}\}$ функции $F_1, \ldots, F_{n-2}$ независимы и на M нет положений равновесия системы уравнений (11). Если L — связный компактный компонент множества M, то

a) L — аналитическое двумерное многообразие, аналитически изоморфное T^2;

b) в любых угловых координатах уравнения (11) на L имеют вид системы (9);

c) система уравнений на L имеет интегральный инвариант с положительной аналитической плотностью.

Действительно, с точностью до аналитического изоморфизма L совпадает с двумерным тором как всякое связное, компактное, ориентируемое аналитическое двумерное многообразие, допускающее касательное векторное поле без особых точек (ср. с [8]). Заключение b) предложения 3 очевидно. Существование интегрального инварианта у системы дифференциальных уравнений на L вытекает из теоремы Якоби о последнем множителе [9]. Из формул Якоби нетрудно получить явное выражение для плотности:

$$U(x) = \frac{\Delta(x)}{V_{n-2}(x)}, \qquad x \in L,$$

где V_{n-2} — $(n-2)$-мерный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\operatorname{grad} F_i(x)$ $(i=1, \ldots, n-2)$ как на сторонах. Следовательно, U — аналитическая функция на L и $U>0$.

В частности, уравнения качения шара по горизонтальной плоскости [10] удовлетворяют условиям предложения 3. Таким образом, все доказываемые ниже утверждения справедливы для динамических систем, возникающих в этой классической задаче неголономной механики.

В указанных выше предположениях относительно системы (9) А. Н. Колмогоров доказал [11], что эти уравнения путем обратимой аналитической замены переменных $(\varphi_1, \varphi_2) \to (x, y)$ приводимы к виду

$$\dot{x} = \frac{\lambda_1}{f(x, y)}, \qquad \dot{y} = \frac{\lambda_2}{f(x, y)}, \tag{12}$$

где $\lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const}$; $f(x, y) > 0$ — аналитическая функция на $T^2\{x, y \bmod 1\}$. Плотность интегрального инварианта (10) в новых переменных равна $f(x, y)$. Ниже всюду рассматриваем случай, когда отношение $\gamma = \lambda_2/\lambda_1$ иррационально. Для почти всех γ уравнения (12) задают квазипериодическое движение на T^2 (см. [11]). Иными словами, записанные в некоторых угловых координатах u, $v \bmod 1$, они имеют вид

$$\dot{u} = \omega_1, \quad \dot{v} = \omega_2, \quad \omega_i = \frac{\lambda_i}{\Lambda} \qquad (i = 1, 2), \quad \Lambda = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx dy. \tag{13}$$

Однако такое приведение возможно не всегда (см., например, [12]).

Обозначим начальные значения переменных x, y соответственно через x_0, y_0. Из теоремы об усреднении следует, что

$$x = x_0 + \frac{\lambda_1}{\Lambda} t + X(t, x_0, y_0), \qquad y = y_0 + \frac{\lambda_2}{\Lambda} t + Y(t, x_0, y_0),$$

$$\Lambda = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx dy, \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{X(t, x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{Y(t, x_0, y_0)}{t} = 0.$$

Расстояние d между точками на $T^2\{x, y \bmod 1\}$ будем определять в метрике $ds^2 = dx^2 + dy^2$ (как в § 2).

Теорема 3. Для любых $\varepsilon > 0$, $T > 0$ существует $\tau > T$, такое, что $|X(\tau, x_0, y_0)| < \varepsilon$, $|Y(\tau, x_0, y_0)| < \varepsilon$, $d\{(x(\tau), y(\tau)), (x_0, y_0)\} < \varepsilon$ при всех $(x_0, y_0) \in T^2$.

Доказательство. Если иррациональное число $\gamma = \lambda_1/\lambda_2$ принадлежит классу K_2 (введенному в § 2), то уравнения (12) приводим к системе (13) (ср. с [11]) и утверждение очевидно. Пусть $\gamma \in K_1$ и $|N\gamma - m| < N^{-3/2}$. Так как $dy/dx = \lambda_2/\lambda_1 = \gamma$, то $y = \gamma x + y_0 - \gamma x_0$. Из первого уравнения системы (12) найдем, что

$$t = \frac{1}{\lambda_1} \int_{x_0}^{x} f(s, \gamma s + y_0 - \gamma x_0)\, ds.$$

едем функцию $g = f - \Lambda$, $\Lambda = \overline{f}$. Тогда

$$t = \frac{\Lambda}{\lambda_1}(x - x_0) + I(x, x_0, y_0), \quad I = \frac{1}{\lambda_1}\int_{x_0}^{x} g(s, \gamma s + y_0 - \gamma x_0)\, ds.$$

чевидно равенство

$$I(n + x_0, x_0, y_0) = \sum_{k=0}^{n-1} F(k\gamma + y_0, x_0),$$

де

$$F(z, x_0) = \frac{1}{\lambda_1}\int_{x_0}^{x_0+1} g(s, \gamma s + y_0 - \gamma x_0)\, ds.$$

Аналитическая функция $F(z, x_0)$ периодична по z с периодом единица и

$$\int_0^1 F(z, x_0)\, dz = 0 \quad \forall x_0 \in [0, 1].$$

Положим $\tau = N\Lambda/\lambda_1$. Пусть за время $t(x_0, y_0)$ координата x получила приращение, равное N. При этом координата y увеличилась на $N\gamma$. По теореме о среднем,

$$|X(\tau, x_0, y_0)| = |x(\tau) - x(0) - N| =$$
$$= |x(\tau) - x(t(x_0, y_0))| \leqslant \frac{\lambda_1}{M_0}|\tau - t(x_0, y_0)| = \frac{\lambda_1}{M_0}|I(N + x_0, x_0, y_0)|, \tag{14}$$

где $M_0 = \min\limits_{(x,y)\in T^2} f(x, y)$. Аналогично,

$$|Y(\tau, x_0, y_0)| \leqslant \frac{\lambda_2}{M_0}|I(N + x_0, x_0, y_0)|. \tag{15}$$

Оценим расстояние

$$d\{(x(\tau), y(\tau)), (x_0, y_0)\} \leqslant \sqrt{(x(\tau) - x_0 - N)^2 + (y(\tau) - y_0 - m)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{X^2(\tau, x_0, y_0) + (|N\gamma - m| + |Y(\tau, x_0, y_0)|)^2}. \tag{16}$$

Согласно лемме 2

$$|I(N + x_0, x_0, y_0)| \leqslant \frac{M_1}{\sqrt{N}} + \frac{M_2}{24N} \qquad \forall (x_0, y_0) \in T^2, \tag{17}$$

где

$$M_1 = \max_{\substack{0\leqslant x_0\leqslant 1\\ 0\leqslant z\leqslant 1}}\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|, \quad M_2 = \max_{\substack{0\leqslant x_0\leqslant 1\\ 0\leqslant z\leqslant 1}}\left|\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right|.$$

Так как существует бесконечно много натуральных чисел N, удовлетворяющих при некоторых целых m неравенству $|N\gamma - m| < N^{-3/2}$, справедливость теоремы в случае $\gamma \in K_1$ вытекает из формул (14)—(17).

Предложение 4. Пусть $f(x_0, y_0) \neq \Lambda$. Тогда функция $X^2(t, x_0, y_0) + Y^2(t, x_0, y_0)$ имеет бесконечно много нулей при $t \to \infty$.

Доказательство. Пусть $X(\tau, x_0, y_0) = 0$. Тогда

$$Y(\tau, x_0, y_0) = y - y_0 - \frac{\lambda_2}{\Lambda}\tau = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(x - x_0) - \frac{\lambda_2}{\Lambda}\tau = 0.$$

Следовательно, достаточно доказать, что бесконечно много нулей имеет функция $X(\tau, x_0, y_0)$. Воспользуемся равенством

$$t = \frac{\Lambda}{\lambda_1}(x - x_0) + I(x, x_0, y_0), \qquad I = \frac{1}{\lambda_1}\int\limits_{x_0}^{x} g(s, \gamma s + y_0 - \gamma x_0)\, ds,$$

$$g = f - \Lambda. \tag{18}$$

Так как $g(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) - \Lambda \neq 0$, то по теореме 2 функция $I(x, x_0, y_0)$ имеет бесконечно много нулей при $x \to \infty$. Значит, бесконечно много раз

$$X(t, x_0, y_0) = x - x_0 - \frac{\lambda_1}{\Lambda} t = 0.$$

Утверждение доказано.

Предложение 5. Существуют точки $(x_0, y_0) \in T^2$, $f(x_0, y_0) = \Lambda$, такие, что одновременно

$$X = (t, x_0, y_0) \geqslant 0 \, (\leqslant 0), \quad Y(t, x_0, y_0) \geqslant 0 \, (\leqslant 0) \ \ \forall t \in R.$$

Доказательство. Пусть $X(t, x_0, y_0) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ для всех $t \in R$ Тогда

$$Y(t, x_0, y_0) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(x - x_0) - \frac{\lambda_2}{\Lambda} t = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} X(t, x_0, y_0) \geqslant 0 \, (\leqslant 0).$$

Воспользуемся формулой (18). По теореме 1 существуют точки $(x_0, y_0) \in T^2$, такие, что

$$g(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) - \Lambda = 0 \quad \text{и} \quad I(x, x_0, y_0) \leqslant 0 \, (\geqslant 0)$$

для всех $x \in R$. Следовательно,

$$X(t, x_0, y_0) = x - x_0 - \frac{\lambda_1}{\Lambda} t = -\frac{\lambda_1}{\Lambda} I(x, x_0, y_0) \geqslant 0 \, (\leqslant 0).$$

Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М., 1974.
2. Боль П. Г. Об одном дифференциальном уравнении из теории возмущений. — В кн.: Собр. трудов. Рига, 1974.
3. Козлов В. В. Об одной задаче Пуанкаре. — «Прикл. матем. и механ.», 1976, **40**, вып. 2, с. 352—355.
4. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.—Л., 1947.
5. Poincare H. Sur les séries trigonométriques. — «C. r. Acad. sci.», **101**, 1885, N 2, p. 1131—1134.
6. Hardy G. H. Weierstrass's nondifferentiable function. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1916, **17**, p. 301—325.
7. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М., 1975.
8. Колмогоров А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика. — В кн.: Международный математический конгресс в Амстердаме, 1954 г. М., 1961.
9. Якоби К. Лекции по динамике. М.—Л., 1936.
10. Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости. — В кн.: Избр. труды. М., 1976.
11. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе. — «Докл. АН СССР», 1953, **93**, № 5, с. 763—766.

12. Шкловер М. Д. О классических динамических системах на торе с непрерывным спектром. — «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1967, № 10, с. 113—124.

Поступила в редакцию
2.2 1977 г.
Кафедра
теоретической механики

V. V. Kozlov

ON INTEGRALS OF QUASIPERIODIC FUNCTIONS

Let $f(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ a continuous function on a n-dimentional tori $T^n\{\varphi_1, \dots, \varphi_n \bmod 1\}$ and let $\omega_1, \dots, \omega_n$ independent frequencies of a quasiperiodic motion on T^n. Qualitativ properties of the difference

$$\int_0^t f(\omega_1 t + \varphi_1^0, \dots, \omega_n t + \varphi_n^0)\, dt - \lambda t, \qquad \lambda = \overline{f},$$

considered as a function of the time t parametrically depending on initial phases $\varphi_1^0, \dots, \varphi_n^0$ is studied in the paper.