НОВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО НЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

В.В.Козлов

Теория рождения периодических решений в канонических системах дифференциальных уравнений, близких к интегрируемым, была разработана А.Пуанкаре для целей небесной механики. В настоящей работе устанавливается применимость его результатов к классической задаче о движении тяжелого несимметричного твердого тела с закрепленной точкой. Тем самым удается существенно расширить класс периодических решений, известных в этой задаче.

§ I. Теорема Пуанкаре. Предположим, что прямое произведение двумерного тора $T^2\{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$ на область $\mathcal{D}$ плоскости $R^2\{I_1, I_2\}$ снабжено естественной канонической структурой

$$\Omega^2 = dI \wedge d\varphi = \sum_{i=1}^{2} dI_i \wedge d\varphi_i .$$

Пусть на множестве $\mathcal{D} \times T^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ задана аналитическая функция

$$H(I,\varphi,\mu) = H_0(I) + \mu H_1(I,\varphi) + \mu^2 H_2(I,\varphi) + \cdots \qquad (I)$$

Пусть для $I = I^\circ$ частоты невозмущенной задачи $\omega_i(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I_i}$ (i =I,2) соизмеримы; тогда функция

$$H_1(I^\circ, \omega_1 t, \omega_2 t + \lambda) \qquad (2)$$

периодична по t. Обозначим через $\overline{H}_1(I^\circ, \lambda)$ временное среднее функции (2).

Теорема Пуанкаре. Предположим, что система с гамильтонианом (I) при $I = I^\circ$ удовлетворяет следующим условиям:

I) Гессиан $\left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \, \partial I_j} \right| \neq 0$;

2) $\frac{\partial^2 \overline{H}_1}{\partial \lambda^2} \neq 0$, когда $\frac{\partial \overline{H}_1}{\partial \lambda} = 0$;

3) квадратичная форма

$$\omega_1^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_2^2} - 2\omega_1\omega_2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_1 \, \partial I_2} + \omega_2^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_1^2} \neq 0.$$

Тогда при малых μ из периодических решений невозмущенной задачи, лежащих на торе $I = I^\circ$, рождается $2n$ $(n>0)$ невырожденных периодических решений (т.е. их характеристические показатели не равны нулю) системы с функцией Гамильтона (I), аналитически зависящих от параметра μ . Причем неустойчивых решений ровно столько, сколько устойчивых (по первому приближению), если μ достаточно мало.

Доказательство см. в [I] (§§ 42,79).

Ниже устанавливается применимость этой теоремы к задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой. Напомним, что в канонических переменных ϑ, φ, ψ (углы Эйлера), p_ϑ , p_φ , p_ψ – функция Гамильтона задачи аналитическая и имеет вид

$$H_0(\vartheta\, \varphi\, \hat{\psi}\, p_\vartheta\, p_\varphi\, p_\psi) + \mu U(\vartheta, \varphi, \hat{\psi}),$$

но H_0 является гамильтонианом задачи Эйлера-Пуансо, а функция μU – потенциальная энергия. Здесь и ниже символом "$\hat{x}$" обозначается пропуск переменной x .

§ 2. Задача Эйлера-Пуансо.

Лемма I [2]. Существует каноническое преобразование

$$(\vartheta\, \varphi\, \psi\, p_\vartheta\, p_\varphi\, p_\psi) \to (\varphi_1'\, \varphi_2\, \varphi_3\, I_1'\, I_2\, I_3)$$

с аналитической производящей функцией, такое, что в новых переменных гамильтониан задачи Эйлера-Пуансо приобретает вид

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\varphi_1'}{A} + \frac{\cos^2\varphi_1'}{B}\right)\left(I_2^2 - I_1'^2\right) + \frac{1}{2C} I_1'^2 .$$

Отметим, что переменные $(\varphi_1'\, \varphi_2\, \varphi_3\, I_1'\, I_2\, I_3)$ аналогичны каноническим переменным Делоне в интегрируемой задаче двух тел.

Из механического смысла новых канонических переменных следует, что область возможных значений I_1' и I_2 есть

$$\Delta = \left\{ I_1', I_2 : I_2 \geq 0,\ |I_1'| \leq I_2 \right\} .$$

Будем считать, что $A > B > C$. В задаче Эйлера-Пуансо обычным способом введем переменные действие-угол:

$$I_1(I_2, H_0) = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{\frac{2H_0 - I_2^2\left(\frac{\sin^2 x}{A} + \frac{\cos^2 x}{B}\right)}{\frac{1}{C} - \left(\frac{\sin^2 x}{A} + \frac{\cos^2 x}{B}\right)}}\, dx . \qquad (3)$$

Область Δ в координатах I_1, I_2 есть снова

$$\Delta = \left\{ I_1, I_2 : I_2 \geq 0,\ |I_1| \leq I_2 \right\} .$$

Используя формулу (3), легко получить, что линии уровня функции $2H_0(I_1, I_2) / I_2^2$ в координатах действие суть прямые линии, проходящие через начало координат. Заметим, что прямые линии $I_1 = 0$, $|I_1| = |I_2|$ (лежащие в Δ) отвечают вращениям твердого тела соответственно вокруг большей и меньшей осей инерции. Вращениям вокруг средней оси инерции соответствуют точки из Δ, расположенные на двух прямых $2H_0/I_2^2 = 1/B$.

В канонических переменных действие-угол ($\varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3\, I_1\, I_2\, I_3$) функция H_0 имеет вид $H_0(\hat\varphi_1\, \hat\varphi_2\, \hat\varphi_3\, I_1\, I_2\, \hat I_3)$.

Лемма 2. Функция $H_0(I_1, I_2)$ непрерывна, является однородной степени 2 в Δ и аналитична в области

$$\Delta_A = \Delta \setminus \left(\{ I_1 = 0\} \cup \{2H_0/I_2^2 = 1/B\} \cup \{|I_1| = |I_2|\} \right).$$

Положим $\omega_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i}$, $\omega_i = \omega_i(I_1, I_2)$ (i = 1,2).

Лемма 3. Гессиан $\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}\right|$ (i, j = 1,2) сохраняет знак в каждой связной подобласти Δ_A (ср. с [3]).

Рассмотрим геометрическое представление Пуансо. Когда на эллипсоиде инерции точка касания (полюс) сделает один полный оборот, тело повернется вокруг оси постоянного момента на некоторый угол

$$\alpha = \alpha(2H_0/I_2^2;\ A, B, C).$$

Лемма 4. ([1]). $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{2\pi}\alpha\left(\frac{2H_0}{I_2^2};\ A, B, C\right).$

Лемма 5. ([3]). $\alpha(x;\ A, B, C)$ – аналитическая функция на $\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{C}\right)\setminus\left\{\frac{1}{B}\right\}$; причем $\alpha \to \infty$, когда $x \to \frac{1}{B}$.

§ 3. Новые периодические решения возмущенной задачи.

I_3 – первый интеграл канонических уравнений с гамильтонианом $H = H_0 + \mu U$; это позволяет свести задачу к двум степеням свободы с функцией Гамильтона $H(\varphi_1\, \varphi_2\, \hat\varphi_3\, I_1\, I_2\, I_3^\circ)$

Возмущение $H_1 = U$ в канонических переменных действие-угол задачи Эйлера-Пуансо имеет вид [I] :

$$H_1 = \sum_m B_{m,1} e^{i(m\varphi_1 + \varphi_2)} + \sum_m B_{m,-1} e^{i(m\varphi_1 - \varphi_2)} + \sum_m B_{m,0} e^{im\varphi_1} ,$$

где $B_{m,1}$, $B_{m,-1}$, $B_{m,0}$ – функции от I_1, I_2, I_3°, аналитические при фиксированном I_3° в области Δ_A. Коэффициенты этого разложения вычислены в [4]. Из лемм 4 и 5 следует, что бесконечное множество прямых, определяемых уравнениями $m\omega_1 \pm \omega_2 = 0$, $m \in \mathbb{Z}$, имеет внутри Δ две предельные прямые $2H_0/I_2^2 = 1/B$, проходящие через начало координат.

Обозначим через ζ, η, ξ координаты центра тяжести тела в главных осях инерции.

Теорема. В задаче о вращении тяжелого несимметричного твердого тела с закрепленной точкой при малых значениях μ существует два счетных семейства изолированных периодических решений, аналитически зависящих от параметра μ. Одно семейство состоит из решений, устойчивых по первому приближению, а второе – из неустойчивых. Эти периодические решения объединяются в пары (состоящие из одного устойчивого и одного неустойчивого), которые при $\mu \to 0$ стремятся к некоторым периодическим решениям задачи Эйлера-Пуансо, расположенным на инвариантных торах $I = I_0$ с числами вращения $\frac{1}{2\pi}\alpha(I_0') = k$ (k – натуральное число).

Эти инвариантные торы невозмущенной задачи удовлетворяют следующим условиям:

1. $I_0 = \{I_1, I_2, I_3^\circ\}$, $I_2 \neq I_3^\circ$;
2. существует $N = N(A,B,C)$ такое, что $k > N$;
3. если $\xi = 0$, то k нечетно; если $\zeta^2 + \eta^2 = 0$, то k – четно; если $\xi \neq 0$ и $\zeta^2 + \eta \neq 0$, то k – любое натуральное число ($k > N$).

Замечание. Основную теорему настоящей работы можно распространить на случай движения несимметричного тела в поле Ф. де Бруна [5] .

Теперь приступим к доказательству этой теоремы. По лемме 3 гессиан $\left| \partial^2 H_0 / \partial I^2 \right|$ отличен от нуля всюду в Δ_A. Условие 3) теоремы А.Пуанкаре означает геометрически, что линии уровня функции $H_0(I_1, I_2)$ не имеют перегибов; в нашем случае этот факт легко следует из формулы (3). Итак, нам осталось найти двумерные торы задачи Эйлера-Пуансо с рациональными числами вращения, которые удовлетворяют условию 2) теоремы А.Пуанкаре. Из явного вида разложения для H_1 следует, что на таких торах $\omega_1 = 0$ или $\omega_2 = n\omega_1$, где n – целое число. Случай $\omega_1 = 0$ для нас не интересен, так как он соответствует перманентным вращениям тела вокруг большей оси инерции.

Используя результаты работы [4] , можно получить для H_1 следующие формулы:

$$H_1 = \zeta\gamma_1 + \eta\gamma_2 + \xi\gamma_3 ,$$

где

$$\gamma_1 = \sin\delta(s_{11}\sin\varphi_2 + s_{21}\cos\varphi_2) + s_{31}\cos\delta,$$
$$\gamma_2 = \sin\delta(s_{12}\sin\varphi_2 + s_{22}\cos\varphi_2) + s_{32}\cos\delta,$$
$$\gamma_3 = \sin\delta(s_{13}\sin\varphi_2 + s_{23}\cos\varphi_2) + s_{33}\cos\delta,$$
$$\cos\delta = I_3/I_2,$$

а S_{ij} суть

$$S_{11} = -\frac{2\pi}{K}\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}(1-q^{2n+1})\,ch\,\sigma}{1-2q^{2n+1}ch\,2\sigma+q^{4n+2}}\sin(2n+1)\varphi_1 ,$$

$$S_{12} = -\frac{2\pi}{K}\sqrt{\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa^2+\Lambda^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}(1+q^{2n+1})\,ch\,\sigma}{1+2q^{2n+1}ch\,2\sigma+q^{4n+2}}\cos(2n+1)\varphi_1 ,$$

$$S_{13} = -\frac{2\pi}{K}\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}(1-q^{2n})\,ch\,\sigma}{1-2q^{2n}ch\,2\sigma+q^{4n}}\sin 2n\varphi_1 ,$$

$$S_{21} = \frac{2\pi}{K}\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}(1+q^{2n+1})\,sh\,\sigma}{1-2q^{2n+1}ch\,\sigma+q^{4n+2}}\cos(2n+1)\varphi_1 ,$$

$$S_{22} = -\frac{2\pi}{K}\sqrt{\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa^2+\Lambda^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}(1-q^{2n+1})\,sh\,\sigma}{1+2q^{2n+1}ch\,2\sigma+q^{4n+2}}\sin(2n+1)\varphi_1 ,$$

$$S_{23} = \frac{2\pi}{K}\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\left\{-\frac{1}{4\,sh\,\sigma}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}(1+q^{2n})\,sh\,\sigma}{1-2q^{2n}ch\,2\sigma+q^{4n}}\cos 2n\varphi_1\right\},$$

$$S_{31} = \frac{2\pi}{K}\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}}\cos(2n+1)\varphi_1 ,$$

$$S_{32} = -\frac{2\pi}{K}\sqrt{\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa^2+\Lambda^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{1-q^{2n+1}}\sin(2n+1)\varphi_1 ,$$

$$S_{33} = \frac{2\pi}{K}\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}}\left(\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{1+q^{2n}}\cos 2n\varphi_1\right.$$

В этих формулах

$$\varkappa^2 = \frac{C(A-B)}{A(B-C)}, \quad \Lambda^2 = \varkappa^2\,\frac{2CH_0 - I_2^2}{I_2^2 - 2AH_0} \tag{4}$$

$K = K(\Lambda)$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем Λ (здесь и ниже обозначения специальных функций общепринятые, см.,например, [6]);

$$q = \exp(-\pi K'/K), \quad \sigma = \frac{\pi}{2K}\mathcal{F}\left(\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{\Lambda},\ \sqrt{1-\Lambda^2}\right).$$

Пусть сначала $\xi = 0$. Из формул для S_{ij} следует, что тогда число вращения $\omega_2/\omega_1 = n$ должно быть нечетным. Положим $n = 2m+1$ (m – целое), $\varphi_1 = \omega_1 t$, $\varphi_2 = \omega_2 t + \lambda$. Нетрудно проверить, что после усреднения по t возмущающая функция H_1 будет равна

$$\overline{H}_1 = \frac{\sin\delta}{2}\left[\xi(\bar S_{11,m}+\bar S_{21,m})\cos\lambda + \eta(\bar S_{12,m}-\bar S_{22,m})\sin\lambda\right],$$

где $S_{ij,m}$ – суть коэффициенты Фурье с номером ($2m+1$) в разложениях функций S_{ij} .

Нам надо проверить, что в точке $\lambda = \lambda_0$, удовлетворяющей уравнению

$$\left.\frac{\partial\overline{H}_1}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\sin\delta}{2}\left[-\xi(\bar S_{11,m}+\bar S_{21,m})\sin\lambda_0 + \eta(\bar S_{12,m}-\bar S_{22,m})\cos\lambda_0\right] = 0 ,$$

выражение

$$\left.\frac{\partial^2\overline{H}_1}{\partial\lambda_1^2}\right|_{\lambda=\lambda_0} = -\frac{\sin\delta}{2}\left[\xi(\bar S_{11,m}+\bar S_{21,m})\cos\lambda_0 + \eta(\bar S_{12,m}-\bar S_{22,m})\sin\lambda_0\right]$$

отлично от нуля. Для этого необходимо прежде всего, чтобы $\sin\delta \neq 0$, то есть $I_2 \neq I_3^{\circ}$ (условие I) нашей теоремы. Предположим теперь, что одновременно справедливы равенства:

$$\left.\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}=0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial^2 \bar{H}_1}{\partial \lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_0}=0. \qquad (5)$$

Уравнения (5) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\sin\lambda_0$ и $\cos\lambda_0$. Так как из чисел $\sin\lambda_0$ и $\cos\lambda_0$ хотя бы одно отлично от нуля, то эта однородная система имеет нетривиальное решение; следовательно, ее определитель равен нулю:

$$\xi^2(\bar{S}_{11,m}+\bar{S}_{21,m})^2+\eta^2(\bar{S}_{12,m}-\bar{S}_{22,m})^2=0.$$

Покажем, что это, однако, не так, если m достаточно велико. Так как $\xi^2+\eta^2\neq 0$, то одно из чисел ξ, η отлично от нуля. Пусть, например, $\xi\neq 0$. Рассмотрим тогда следующее выражение

$$\bar{S}_{11,m}+\bar{S}_{21,m}=-\frac{2\pi}{K}\frac{1}{\sqrt{x^2+\Lambda^2}}\,\frac{q^{m+1/2}\left[(1-q^{2m+1})\operatorname{ch}\sigma-(1-q^{2m+1})\operatorname{sh}\sigma\right]}{1-2q^{2m+1}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4m+2}}. \qquad (6)$$

Так как H_0 непрерывна по I_1 и I_2 и является однородной функцией степени 2 по этим переменным (лемма 2), то Λ есть функция по отношению $y=I_1/I_2$. Иными словами, Λ есть функция, определенная на пучке прямых, проходящих через начало координат. Из (4) следует, что на прямой $2H_0/I_2^2=1/B$, функция Λ равна C/A, следовательно, меньше I. Рассмотрим некоторую малую окрестность W числа $y_0=(I_1/I_2)_0$, отвечающего вращениям тела вокруг средней оси инерции. Из непрерывности $\Lambda(y)$ следует, что в W справедливы неравенства $0<\Lambda_1<\Lambda<\Lambda_2<1$ ($\Lambda_i=const$; $i=1,2$). Следовательно, в этой окрестности $0<q<q_0<1$ и $|\sigma|<|\sigma_0|$ (q_0 и σ_0 – некоторые постоянные).

Выражение (6) равно нулю тогда и только тогда, когда

$$(1-q^{2m+1})\operatorname{ch}\sigma-(1+q^{2m+1})\operatorname{sh}\sigma=0. \qquad (7)$$

Однако, ввиду неравенства $0<q<q_0<1$ и $|\sigma|<\sigma_0$, соотношение (7) не может иметь место начиная с некоторого номера $m=N_1$, зависящего только от A, B, C. Так как при достаточно больших m отношение I_1/I_2 для двумерных торов задачи Эйлера-Пуансо с числами вращения $\omega_2/\omega_1=2m+1$ попадает в указанную окрестность W (лемма 5), то, начиная с некоторого N, зависящего от A, B, C, эти торы удовлетворяют теореме А.Пуанкаре о рождении изолированных периодических решений возмущенной задачи. Если $\xi=0$, а $\eta\neq 0$, то рассуждения аналогичны.

Второй случай, когда $\xi^2+\eta^2=0$, приводит к торам с четными числами вращения ω_2/ω_1; проверка условий применимости теоремы А.Пуанкаре не составляет труда. Очевидно, что общий случай $\xi\neq 0$ и $\xi^2+\eta^2\neq 0$ сводится к этим двум частным случаям.

Литература

I. Пуанкаре А. Новые методы в небесной механике. "Избранные труды", т.I. М., "Наука", 1971.

2. Депри А. Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости. Сб."Механика", 1968, вып.2.

3. Арнольд В.И. Доказательство теоремы А.Н.Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. "УМН", 1963, 18, вып.5.

4. Садов Ю.А. Переменные действие-угол в задаче Эйлера-Пуансо. "ПММ", 1963, 18, вып.5.

5. Белецкий В.В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около неподвижной точки под действием центрального ньютоновского поля сил. "ДАН СССР" 1957, 113, №2.

6. Бейтмен Г. и Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., "Наука", 1967.