при одноразовом ударе. Эта задача привлекательна не только простотой решения. Во многих случаях второй удар происходит в момент, когда задний торец отхода прошел почти всю толщину преграды и процесс выбивания пробки практически закончен. Смещение u_2 и скорость пробки v_2, соответствующие моменту отскока t_2, определяются из решений (36), (34). Дальнейшее движение пробки до новой встречи с бойком происходит по закону

$$v^2 - v_2^2 = \gamma[(h-u)^2 - (h-u_2)^2], \quad \gamma = \frac{2\tau}{\rho R h}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае минимальную скорость V_m найдем из равенства

$$v_2 = \sqrt{\gamma}(h - u_2)$$

путем подстановки в него значений u_2 и v_2.

Поступила в редакцию
5.11 1976 г.
Кафедра
газовой и волновой динамики

A. Ya. Sagomonyan

ON THE PROBLEM OF PENETRATING AN OBSTACLE BY A CYLINDER

The paper deals with the problem of penetrating a thin obstacle by a cylinder in an approximate one-dimensional formulation for the following three cases: a rigid, a rigid-plastic, and an elastic body. The obstacle is assumed to be rigid-plastic. The lateral surface of the cork is acted on by a constant shearing stress. The law of penetration for all cases is expressed in terms of elementary functions.

УДК 531.31

В. В. Козлов

О ГЕОМЕТРИИ ОБЛАСТЕЙ ВОЗМОЖНЫХ ДВИЖЕНИЙ С КРАЕМ

Натуральная механическая система — тройка (M, ds, V), где M — гладкое многообразие (конфигурационное пространство), ds — риманова метрика на M (она задает кинетическую энергию системы $T=1/2\ (ds/dt)^2$); V — гладкая функция на M (потенциал поля сил). Движения натуральной системы — это отображения $m: \Delta \to M$ (Δ — интервал в R), удовлетворяющие в локальных координатах на M уравнениям Лагранжа с лагранжианом $L=T+V$ (подробности см. в [1, гл. IV]). Пусть v — касательный вектор к многообразию M в точке a. Так как квадратичная форма T положительно определена, то движение с начальными условиями $m(0)=a$, $d/dt\ m(0)=v$ существует и единственно. Уравнения движения имеют первый интеграл — интеграл энергии: $T-V=h$. При каждом фиксированном значении h движение происходит в области $D=\{h+V\geqslant 0\}$, которая называется областью возможных движений.

Согласно принципу наименьшего действия в форме Якоби движения натуральной механической системы внутри области D являются геодезическими линиями следующей метрики:

$$d\rho^2 = (h+V)\, ds^2.$$

Когда $h>\max_M(-V)$, область D совпадает с M и $(D, d\rho)$ — риманово многообразие. В противном случае граница ∂D области D не пуста и метрика Якоби имеет особенность (длины кривых, лежащих на границе, равны нулю).

Если в некоторый момент времени движение $m(t)$, $m\in D$, достигло границы ∂D, то скорость точки m обращается в нуль и, как доказано в работе [2], в последующие моменты m движется в обратную сторону по той же траектории с той же по величине скоростью. Поэтому в случае, когда ∂D не пуста, естественно отождествить геодезические метрики Якоби (определенные внутри области D) с траекториями движения натуральных механических систем. Если D компактна, то любая геодезическая не стеснена, то есть определена на всей числовой прямой, а не только до момента попадания точки m на ∂D.

Всюду ниже область D считаем компактной и связной, а также предполагаем, что на границе нет критических точек потенциала V. Другими словами, исключаем из рассмотрения те значения h, при которых уравнения движения имеют положения равновесия. Множество исключительных значений полной энергии имеет нулевую меру.

Геометрия геодезических в области D, имеющей края, не похожа на привычную геометрию римановых пространств. Например, если риманово многообразие компактно, то любые две его точки можно соединить хотя бы одной геодезической [3, гл. II]. На примерах легко показать, что этот факт не имеет места для компактных областей возможных движений с краем.

Пусть точки a, $b\in D$. Обозначим через $\Omega_{a,b}$ множество всех кусочно-гладких путей $\gamma:[0, 1]\to D$ с началом a и концом b. Определим функцию $d: D\times D\to R$ по формуле

$$d(a, b)=\inf\{L(\gamma):\gamma\in\Omega_{a,b}\},$$

где $L(\gamma)$ — длина пути γ в метрике $d\rho$. Неотрицательная функция d задает отклонение на множестве D [4, гл. IX], так как

1) $d(a, a)=0$ для всех $a\in D$;

2) $d(a, b)=d(b, a)$ для всех $a, b\in D$;

3) $d(a, b)+d(b, c)\geqslant d(a, c)$ для всех a, b, $c\in D$.

Отметим, что отклонение d не является расстоянием на D, так как $d(a, b)=0$ для любых точек a, b, лежащих в одной связной компоненте границы ∂D. Однако если $a\notin\partial D$, то из равенства $d(a, b)=0$ следует $a=b$. Значит, d есть расстояние внутри области D.

Расстоянием от точки $c\in D$ до границы ∂D назовем число

$$\partial(c)=\inf_{x\in\partial D} d(c, x).$$

Если граница связна, то $\partial(c)=d(c, a)$ для всех $a\in\partial D$. Расстояние $\partial(c)=0$ тогда и только тогда, когда $c\in\partial D$.

Справедливы следующие утверждения:

1. *Функции $d(a, b)$ и $\partial(c)$ непрерывны соответственно на $D\times D$ и D.*

2. Если граница связна, то для всех $a, b\in D$

$$d(a, b)\leqslant\partial(a)+\partial(b).$$

3. Если $d(a,b)<\partial(a)+\partial(b)$, то точки a и b можно соединить геодезической линией длины $d(a,b)$, целиком лежащей внутри области D. Доказательство этих утверждений просто, и мы его здесь не приводим.

Теорема. *Любую точку $a\in D$* можно соединить с некоторой точкой границы ∂D *геодезической линией длины $\partial(a)$.*

Обозначим через $m(t, a)$ движение натуральной системы, которое *начинается с нулевой скоростью в точке* $a\in\partial D$, то есть $m(0, a)=a$. Так как уравнения движения обратимы [2], справедливо

Следствие.

$$\bigcup_{t\in R}\ \bigcup_{a\in\partial D} m(t, a)=D.$$

Доказательство теоремы. Если $a\in\partial D$, *то заключение теоремы очевидно.* Пусть $a\in\operatorname{Int} D$. Обозначим через S сферу малого радиуса $\delta>0$ с центром в точке a. Так как S компактна, а функция $\partial(x)$, $x\in S$, непрерывна, то на S существует точка b, такая, что

$$\partial(b)=\min_{x\in S}\partial(x).$$

Обозначим через γ единственную геодезическую, проходящую через точки a и b. Пусть s — натуральный параметр на $\gamma(s)$, причем $\gamma(0)=a$. Очевидно, что $\gamma(\delta)=b$. Покажем, что для всех $\delta\leqslant s<\partial(a)$ справедливо тождество

$$\partial(\gamma(s))=\partial(a)-s \tag{1}$$

(ср. с доказательством теоремы Хопфа — Ринова [3, гл. II]). Так как каждый путь из a в некоторую точку на ∂D пересекает S, то

$$\partial(a)=\min_{x\in S}(d(a, x)+\partial(x))=\delta+\partial(b).$$

Следовательно, равенство (1) справедливо для $s=\delta$.

Пусть $s_0 \in [\delta, \partial(a))$ — верхняя грань значений s, для которых верно тождество (1). Тогда по непрерывности равенство (1) справедливо и для $s=s_0$. Пусть S' — сфера малого радиуса $\delta'>0$ вокруг точки $\gamma(s_0) \in \mathrm{Int} D$, и пусть a' — точка на S', наименее удаленная от ∂D. Тогда

$$\partial(\gamma(s_0)) = \min_{x \in S'} (d(\gamma(s_0), x) + \partial(x)) = \delta' + \partial(a').$$

Следовательно,

$$\partial(a') = \partial(a) - (s_0 + \delta').$$

Утверждается, что a' есть $\gamma(s_0+\delta')$. Действительно, учитывая неравенство треугольника, получаем

$$d(a, a') \geqslant \partial(a) - \partial(a') = s_0 + \delta'. \tag{2}$$

Но путь длины $s_0+\delta'$ получится, если идти по γ от a до $\gamma(s_0)$, а затем по кратчайшей геодезической — из $\gamma(s_0)$ в a'. Согласно неравенству (2) этот путь имеет наименьшую возможную длину. Значит, он является геодезической, а потому совпадает с γ. Итак,

$$\gamma(s_0+\delta') = a', \quad \partial(\gamma(s_0+\delta')) = \partial(a) - (s_0 + \delta').$$

Противоречие с определением s_0 завершает доказательство тождества (1).

Рассмотрим теперь движение $m(t)$ со следующими начальными данными: $m(0)=a$, скорость m направлена вдоль γ, а величина скорости определяется по зафиксированному выше значению h интеграла энергии. Покажем, что, когда параметр s стремится к $\partial(a)$, то время t стремится к некоторому конечному пределу τ. Предположим противное, то есть $\tau=\infty$. Так как при $t\to\infty$ точка m побывает бесконечно много раз в точках, сколь угодно близких к ∂D, а длина $\gamma(s)$, $0 \leqslant s < \partial(a)$, конечна, $m(t)$ неограниченно приближается к ∂D, оставаясь внутри области D (ср. с [2]). Однако, как доказано в работе [2], такого асимптотического движения не может быть. Следовательно, $\tau<\infty$. Так как функция $m(t)$ непрерывна, $m(\tau) \in \partial D$. Переходя в равенстве (1) к пределу при $t\to\tau$, заключаем, что длина кривой $m(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, равна $\partial(a)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М., 1974.
2. Козлов В. В. Принцип наименьшего действия и периодические решения в задачах классической механики. — «Прикл. матем. и механ.», 1976, 40, вып. 3, с. 399—407.
3. Милнор Дж. Теория Морса. М., 1965.
4. Бурбаки Н. Общая топология, ч. 3. М., 1975.

Поступила в редакцию
23.11 1976 г.
Кафедра
теоретической механики

V. V. Kozlov

ON THE GEOMETRY OF DOMAINS OF POSSIBLE MOTIONS WITH BOUNDARY

Suppose that the domain of possible motions $D=\{h+V \geqslant 0\}$ in a natural system with a Lagrangian $T+V$ is connexe, compact, without critical points of the function V on its boundary ∂D, and δ is the distance from an arbitrary point $a \in D$ to ∂D in the Jacobi metric. It is proved that a motion

$$m(t)\ (m \in D), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \quad m(0) = a, \quad m(\tau) \in \partial D$$

exists such that its length in the Jacobi metric is exactly equal to δ.