Этим значениям соответствует вектор l с компонентами $l_1 = -3.62$ *сек*$^{-1}$, $l_2 = -37.8$ *сек*$^{-1}$, $l_3 = 41.91$ *сек*$^{-1}$. Фиг. 2 иллюстрирует изменение управляющих моментов M_x, M_y, M_z *н·м* в процессе движения (кривые *1*, *2*, *3* соответственно).

Поступила 30 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гродзовский Г. Л., Охоцимский Д. Е., Белецкий В. В. и др.* Механика космического полета. Механика в СССР за 50 лет, т. 1. М., «Наука», 1968.
2. *Thomson W. T., Reiter G. S.* Attitude drift of space vehicles. J. Astronaut. Sci., 1960, vol. 7, No. 2.
3. *Newkirk H. L., Haseltin W. R., Pratt A. V.* Stability of rotating space vehicles. Proc. IRE, 1960, vol. 48, No. 4.
4. *Альбрехт Э. Г., Красовский Н. Н.* О наблюдении нелинейной управляемой системы в окрестности заданного движения. Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 7.
5. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. Доп. к кн. И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения». М., «Наука», 1966.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
7. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М., «Мир», 1971.
8. *Seltzer S. M., Schweitzer G., Asner B. Jr.* Attitude control of a spinning skylab. J. Spacecraft and Rockets, 1973, vol. 10, No. 3.

УДК 531.38

О КАЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ ГОРЯЧЕВА — ЧАПЛЫГИНА

В. В. Козлов

(Москва)

Исследуются качественные свойства типичных вращений тяжелого твердого тела в случае Горячева — Чаплыгина, когда первые интегралы уравнений движения независимы. Найдены числа вращения касательных векторных полей на двумерных инвариантных торах. Показано, что нутация твердого тела — квазипериодическое движение, а собственное вращение и прецессия обладают главным движением. Если число вращения иррационально, то в случае быстрых вращений твердого тела главное движение линии узлов равно нулю.

В случае Горячева — Чаплыгина задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой главные моменты инерции удовлетворяют соотношению $A = B = 4C$, а центр тяжести лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Кроме того, начальные условия выбираются так, чтобы постоянная интеграла площадей была равна нулю. Тогда существует дополнительный частный интеграл, наличие которого позволяет свести интегрирование уравнений движения к квадратурам [1].

Качественное исследование движения волчка Горячева — Чаплыгина начато Л. Н. Сретенским в работе [2], где в уравнения движения введен малый параметр, соответствующий быстрым вращениям тела, и дана картина движения в первом приближении по этому параметру. Эти исследования были продолжены в [3]. Работа [4] посвящена анализу изменения специальных переменных, введенных Чаплыгиным для интегрирования уравнений движения. Качественная картина вращения тела в некоторых вырожденных случаях исследована в работе [5].

Ниже рассматриваются некоторые математические задачи, возникающие в связи с анализом движения тела в случае Горячева — Чаплыгина. При этом не делается никаких упрощающих предположений.

1. Динамические системы, возникающие на инвариантных торах задачи Горячева — Чаплыгина. Переменные Эйлера — Пуассона $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ для симметрии формул будем всюду обозначать соответственно через $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Уравнения Эйлера — Пуассона в случае Горячева — Чаплыгина имеют четыре независимых интеграла [1]

$$I_1 = 4(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 - 2\mu x_4, \quad I_2 = x_3(x_1^2 + x_2^2) + \mu x_1 x_6$$
$$I_3 = 4(x_1 x_4 + x_2 x_5) + x_3 x_6 \quad (I_3 = 0), \quad I_4 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \quad (I_4 = 1) \tag{1.1}$$

В этих формулах $\mu = Pr/C$, где P — вес тела, r — расстояние от центра масс до точки подвеса, C — момент инерции относительно оси динамической симметрии.

Обозначим через $E(I_1, I_2)$ совместные уровни четырех интегралов (1.1) в шестимерном фазовом пространстве уравнений Эйлера — Пуассона.

Всюду ниже рассматриваются только такие постоянные интегралов I_1
и I_2, при которых функции (1.1) независимы на $E(I_1, I_2)$. В частности,
исключается случай, когда $I_1 = 0$. Остальные постоянные образуют мно-
жество нулевой меры. Если интегралы (1.1) независимы, то E — гладкое
двумерное многообразие. На E естественным образом возникает класси-
ческая динамическая система [6]. Эти системы могут быть исследованы ме-
тодами заметки [7].

Каждая связная компонента E — двумерный тор [7]. Естественно по-
ставить вопрос о количестве связных компонент E. Частичный ответ на
этот вопрос дает

Лемма 1. Если μ мало, то E — объединение двух торов.

Доказательство. Пусть сначала $\mu = 0$ Тогда совместные уровни функций I_1 и I_2
в трехмерном пространстве $R^3\{x_1x_2x_3\}$ — две окружности S_ι^1 $(\iota = 1, 2)$, лежащие в
разных плоскостях $x_3 = \text{const}$ Каждой точке $\{x_1^\circ x_2^\circ x_3^\circ\}$ на S_ι^1 $(\iota = 1,2)$ соответствует
окружность, высекаемая на сфере Пуассона $\{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1\}$ интегралом пло-
щадей

$$4(x_1^\circ x_4 + x_2^\circ x_5) + x_3^\circ x_6 = 0$$

Так как положение этой окружности непрерывно зависит от точки $\{x_1^\circ x_2^\circ x_3^\circ\}$, то
при $\mu = 0$ многообразие E состоит из двух связных компонент Если $\mu \neq 0$, но мало,
то по теореме Морса [8] совместные уровни будут диффеоморфны уровню при $\mu = 0$ и,
следовательно, иметь столько же компонент связности.

Замечание. Будем увеличивать μ. Тогда, по той же теореме Морса, количество
связных компонент может измениться только тогда, когда интегралы (1 1) станут за-
висимыми.

На каждом двумерном инвариантном торе T^2 можно выбрать угловые
переменные φ_1, φ_2 mod 2π, в которых уравнения движения имеют вид

$$\varphi_1^{\cdot} = \omega_1, \quad \varphi_2^{\cdot} = \omega_2 \tag{1.2}$$

где ω_ι $(\iota = 1, 2)$ — постоянные, зависящие от I_1 и I_2. Уравнения (1.2)
задают на T^2 условно-периодическое движение с двумя частотами ω_1 и
ω_2. Для их вычисления введем переменные s_1, s_2 согласно формулам

$$x_3 = s_1 + s_2, \quad 4(x_1^2 + x_2^2) = -s_1 s_2$$

Отметим, что переменные s_1, $-s_2$ были введены Чаплыгиным для ин-
тегрирования уравнений движения [1]. Переменные Эйлера — Пуассона
можно выразить через s_1, s_2, воспользовавшись интегралами (1.1). В но-
вых переменных уравнения движения приобретут следующий вид (ср.
с [1], гл. VIII):

$$s_1^{\cdot} = \frac{\sqrt{\Phi(s_1)}}{2(s_1 - s_2)}, \quad s_2^{\cdot} = \frac{\sqrt{\Phi(s_2)}}{2(s_1 - s_2)} \tag{1.3}$$

$$(\Phi(z) = 4\mu^2 z^2 - (z^3 - I_1 z - 4I_2)^2)$$

Уравнения (1.3) по форме совпадают с уравнениями в случае Ковалев-
ской [7]. Следовательно, к этим уравнениям можно применить результаты
заметки [7].

Переменные s_1 и s_2 изменяются в интервалах $[a_1 b_1]$ и $[a_2 b_2]$, где много-
член $\Phi(z) \geqslant 0$. Если $I_2 \neq 0$, то пересечение $[a_1 b_1] \cap [a_2 b_2]$ пусто. В про-
тивном случае переменные s_1 и s_2 могут совпадать, а так как $s_1 s_2 \leqslant 0$, то

при некоторых начальных данных на T^2 имеет место равенство $s_1 = s_2 = 0$. Следовательно, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и $I_2 = 0$. Качественное исследование изменения переменных s_1 и s_2 подробно изложено в [4,7]

Числа a_ι, b_ι $(\iota = 1, 2)$ — простые корни многочлена $\Phi(z)$, так как в противном случае на соответствующем инвариантном торе существовали бы асимптотические движения. Но этого не может быть в силу предположения о независимости интегралов (1.1).

Введем угловые переменные ψ_1, ψ_2 mod 2π по формулам

$$\psi_\iota = \frac{\pi}{\tau_\iota} \int_{a_\iota}^{s_\iota} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}, \quad \tau_\iota = \int_{a_\iota}^{b_\iota} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}, \quad s_\iota \in [a_\iota b_\iota] \quad (\iota = 1, 2) \tag{1 4}$$

В новых переменных уравнения (1.3) запишутся следующим образом:

$$\psi_\iota^{\cdot} = \frac{\pi}{2\tau_\iota [s_1(\psi_1) - s_2(\psi_2)]} \quad (\iota = 1, 2) \tag{1.5}$$

где $s_\iota(z)$ — действительные гиперэллиптические функции с периодом 2π, определяемые из соотношений (1.4). Уравнения (1.5) обратимой заменой переменных $(\psi_1, \psi_2) \to (\varphi_1, \varphi_2)$ приводятся к виду [7] (п. 3)

$$\varphi_\iota^{\cdot} = \frac{\pi}{2\tau_\iota \Lambda} \quad (\iota = 1, 2) \tag{1.6}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} s_1(x)\,dx - \int_0^{2\pi} s_2(x)\,dx\right) \quad (\Lambda \neq 0)$$

Эти уравнения определяют на T^2 $\{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$ условно-периодическое движение Отношение частот (число вращения) равно $\gamma = \tau_1/\tau_2$. Число вращения γ зависит, конечно, от I_1 и I_2. Эта функция непостоянна, по крайней мере при малых значениях параметра μ.

2. Задача о собственном вращении. Будем исследовать движение тела в углах Эйлера ϑ, φ, ψ. Очевидно, что $x_1, x_2, \ldots, x_6$ — условно-периодические функции времени. Так как $\cos\vartheta = x_6$ и $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, то функция $\vartheta(t)$ тоже условно-периодична.

Лемма 2. Если в начальный момент времени $I_1\mu^2 < 4I_2^2$, то существует $\varepsilon > 0$, такое, что при всех t

$$|x_6(t)| < 1 - \varepsilon \tag{2 1}$$

Доказательство Пусть $|x_6| = 1$ Тогда $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ Из интегралов (1 1) вытекают равенства $x_1^2 + x_2^2 = I_1/4$, $|x_1| = |I_2/\mu|$ $(\mu \neq 0)$ Отсюда $x_2^2 = I_1/4 - I_2^2/\mu^2$ Следовательно, если в некоторый момент времени на E выполнено равенство $|x_6| = 1$, то $I_1\mu^2 \geqslant 4I_2^2$ Так как множество E компактно, то в условиях леммы при некотором $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство (2 1).

Замечание Если $I_1\mu^2 \geqslant 4I_2^2$, то при некоторых начальных данных, удовлетворяющих этому неравенству, ось динамической симметрии занимает вертикальное положение

Используем следующую терминологию из небесной механики [9,10]. Величина $\xi(t)$ обладает средним движением $\lambda = \text{const}$, если для всех t

$$\xi(t) = \lambda t + O(1)$$

Величина $\xi(t)$ обладает главным движением λ, если $\xi(t) = \lambda t + o(t)$ при $t \to \infty$, т. е.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\xi(t)-\lambda t}{t}=0$$

Утверждение 1. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда собственное вращение обладает средним движением.

Доказательство. Так как $1 - x_6^2 > \varepsilon > 0$ для всех t, то

$$e^{i\varphi}=\frac{x_5+ix_4}{\sqrt{1-x_6^2}}$$

есть двухчастотная условно-периодическая функция времени. По теореме Боля об аргументе [11]

$$\varphi = (m\omega_1 + n\omega_2)\, t + f(t)$$

где m, n — целые числа, а f условно периодична по t Следовательно, $\varphi = \lambda t + O(t)$.

Если в некоторый момент времени $t = t'$ выполняется равенство $x_6^2 = 1$, то формально угол φ не определен. В этом случае можно поступить следующим образом. Известно, что

$$\varphi^{\cdot} = x_3 - x_6\frac{x_1x_4+x_2x_5}{1-x_6^2} = \frac{x_3(4-3x_6^2)}{4(1-x_6^2)}$$

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, когда $I_1 \neq 0$, получим

$$\lim_{t\to t'}\varphi^{\cdot}=\frac{I_2}{2I_1},\quad \lim_{t\to t'-0}\varphi(t) = \lim_{t\to t'+0}\varphi(t)=\varphi'$$

В силу последнего равенства естественно положить $\varphi(t') = \varphi'$ Тогда функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна при всех $t \in (-\infty, \infty)$
Эти рассуждения указывают на целесообразность изучения собствен-
ного вращения даже в том случае, когда ось симметрии может занимать
вертикальные положения.

Теорема 1. Пусть $I_1 \neq 0$, $I_1\mu^2 \neq 4I_2^2$ Если при заданных постоянных
интегралов I_1, I_2 частоты ω_1 и ω_2 соизмеримы, то собственное вращение
обладает средним движением Если ω_1 и ω_2 несоизмеримы, то собственное
вращение обладает главным движением, зависящим только от I_1, I_2.

Доказательство В силу утверждения 1 достаточно рассмотреть слу-
чай, когда $I_1\mu^2 > 4I_2^2$. Если отношение ω_1/ω_2 рационально, то $\varphi^{\cdot}$ — не-
прерывная периодическая функция времени (в точках, где $x_6^2 = 1$, функ-
ция $\varphi^{\cdot}$ полагается равной $I_2/2I_1$). Следовательно, в этом случае $\varphi =$
$= \lambda t + O(1)$.

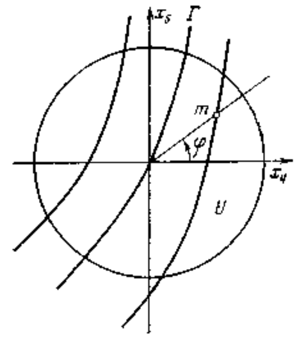
Пусть теперь отношение ω_1/ω_2 иррационально. Рассмотрим на T^2 $\{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$ окружность $S^1 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in T^2 \cdot \varphi_1 = \varphi_1^\circ\}$. Переменная $\varphi_2 \bmod 2\pi$ является угловой переменной на S^1. Определим на прямом произведении $S^1 \times [0, 2\pi/\omega_1]$ функцию

$$F(\varphi_2, t) = \int_0^t \Phi(\omega_1\tau + \varphi_1^\circ, \omega_2\tau + \varphi_2)\, d\tau, \quad \varphi_2 \in S^1, \quad t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega_1}\right]$$

Здесь $\varphi^{\cdot} = \Phi(\varphi_1, \varphi_2)$. Ясно, что $f(\varphi_2) = F(\varphi_2, 2\pi/\omega_1)$ — изменение угла φ за время, когда точка на T^2, двигаясь по иррациональной обмотке из точки $(\varphi_1^\circ, \varphi_2) \in S^1$, снова вернется на S^1.

Докажем, что $f(\varphi_2)$ интегрируема по Риману.

Если $f(\varphi_2)$ имеет разрыв в точке $\varphi_2 = \varphi_2'$, то траектория $(\omega_1 t + \varphi_1^\circ, \omega_2 t + \varphi_2')$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi/\omega_1$ проходит через точки на T^2, где $x_6^2 = 1$ Таких точек четыре, поэтому $f(\varphi_2)$ может иметь только конечное число точек разрыва Следовательно, достаточно доказать ограниченность этой функции



Докажем, что $F(\varphi_2, t)$ ограничена на $S^1 \times [0, 2\pi/\omega_1]$.

Рассмотрим поведение угла φ, когда точка $m(t) = (\omega_1 t + \varphi_1^\circ, \omega_2 t + \varphi_2)$ находится вблизи точек $a_1, \ldots, a_4$, где $x_6^2 = 1$ Так как $I_1\mu^2 \neq 4I_2^2$, то якобиан

$$\frac{\partial(I_1I_2I_3I_4)}{\partial(x_1x_2x_3x_6)}$$

отличен от нуля в точках $a_1, \ldots, a_4 \in T^2$ Следовательно, в малых окрестностях этих точек можно принять переменные x_4 и x_5 за локальные координаты на T^2, и переменные x_1, x_2, x_3 и x_6 — однозначные аналитические функции от x_4 и x_5

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$x_4^{\cdot} = x_3x_5 - x_2x_6, \quad x_5^{\cdot} = x_1x_6 - x_3x_4 \tag{2 2}$$

где вместо x_1, x_2, x_3 и x_6 подставлены их выражения через x_4 и x_5. Так как $I_1 \neq 0$, то уравнения (2 2), не имеют особых точек вблизи a_i ($i = 1, \ldots, 4$)

Существуют достаточно малые окрестности U_i точек a_i, такие, что, когда $m(t) \in U_i$, то колебание функции $F(\varphi_2, t)$ не превосходит 2π.

Действительно, когда m движется по траекториям уравнений (2 2), то $F(\varphi_2, t)$ совпадает с углом φ, изображенным на фигуре Траектория Г, проходящая через точку $x_4 = x_5 = 0$, делит $U_i = U$ на две части, в каждой из которых изменение φ непрерывно, а при переходе через Г функция φ испытывает скачок на π. Но во всех случаях колебание φ ограничено заведомо числом 2π, так как в малой окрестности U траектории уравнений (2 2) почти прямые

В дополнение к U_i ($i = 1, \ldots, 4$) функция $1 - x_6^2 > \varepsilon > 0$, следовательно, функция $\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$ ограничена, а вместе с ней ограничено колебание функции $F(\varphi_2, t)$. Объединяя доказанное, заключаем, что $F(\varphi_2, t)$ ограничена в $S^1 \times [0, 2\pi/\omega_1]$

За время $t = n2\pi/\omega_1$ угол φ станет равным

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k2\pi\omega_2/\omega_1 + \varphi_2) = \sigma_n$$

Так как ω_2/ω_1 иррационально, то по теореме Вейля о равномерном распределении [12] существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{n} = \lambda$$

Из ограниченности функции $F(\varphi_2, t)$ следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \frac{2\pi\lambda}{\omega_1} = \Lambda$$

По той же теореме Вейля число Λ зависит только от I_1, I_2. Теорема доказана.

Идея доказательства этой теоремы восходит к исследованиям Вейля о среднем движении перигелиев планет [10].

3. Задача о движении линии узлов. Угол прецессии ψ определяется из следующего соотношения:

$$\psi^{\cdot} = \frac{x_1x_4 + x_3x_5}{1 - x_6^2} = -\frac{x_3x_6}{4(1 - x_6^2)}$$

Если выполнены условия леммы 1, то $\psi^{\cdot} = \Psi$ — аналитическая функция от равномерно изменяющихся переменных φ_1 и φ_2. В других случаях Ψ имеет особенность в точках на T^2, где $x_6^2 = 1$. Пусть $x_6^2 = 1$ при $t = t'$. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, когда $I_1 \neq 0$, получим

$$\lim_{t\to t'} \Psi(t) = \mp \frac{I_2}{2I_1} \quad (x_6(t) \to \pm 1)$$

Теорема 2. Пусть $I_1 \neq 0$, $I_1\mu^2 \neq 4I_2^2$. Если частоты ω_1 и ω_2 соизмеримы, то линия узлов обладает средним движением. Если же ω_1 и ω_2 несоизмеримы, то линия узлов обладает главным движением, зависящим только от I_1, I_2.

Доказательство. Если отношение частот ω_1/ω_2 рационально, то $\psi^{\cdot}$ — непрерывная периодическая функция времени (в точках, где $x_6 = \pm 1$, она полагается равной $\mp I_2/2I_1$). Следовательно, $\psi = \lambda t + O(1)$.

Рассмотрим случай, когда отношение ω_1/ω_2 иррационально. Если $I_1\mu^2 < 4I_2^2$, то $\Psi(\varphi_1, \varphi_2)$ непрерывна на T^2 и заключение теоремы вытекает из теоремы об усреднении [6]. Если же $I_1\mu^2 > 4I_2^2$, то как при доказательстве теоремы 1, введем функцию

$$F(\varphi_2, t) = \int_0^t \Psi(\omega_1 t + \varphi_1^\circ, \ \omega_2 t + \varphi_2)\, dt, \quad \varphi_2 \in S^1, \quad t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega_1}\right]$$

Для доказательства ее ограниченности снова рассмотрим окрестности U_i точек a_i $(i = 1 \ldots 4)$. В областях U_i, где x_6 близко к 1, запишем тождество

$$\psi^{\cdot} = 2\varphi^{\cdot} + f, \quad f = -\frac{x_3(1 - 6x_3)}{4(1 + x_6)}$$

Когда $m(t) \in U_i$, то интеграл по времени от f ограничен (так как f непрерывна в U_i) вместе с интегралом от $2\varphi^{\cdot}$. Аналогично рассматривается движение в других окрестностях, где x_6 близко к -1. Вне U_i $(i = 1 \ldots 4)$ функция Ψ ограничена, следовательно, ограничено колебание F. Объединяя сказанное, получим, что $F(\varphi_2, t)$ ограничена на $S^1\{\varphi_2 \bmod 2\pi\} \times [0, 2\pi/\omega_1]$. Для завершения доказательства осталось применить теорему Вейля о равномерном распределении.

Утверждение 2. Если $I_1\mu^2 \neq 4I_2^2$, то функция $\Psi(\varphi_1, \varphi_2)$ интегрируема по Лебегу на $T^2\{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$.

Доказательство. Если $I_1\mu^2 < 4I_2^2$, то Ψ непрерывна на T^2 и утверждение очевидно. В случае, когда $I_1\mu^2 > 4I_2^2$, функция Ψ непрерывна всюду, кроме точек $a_1, \ldots, a_4$, где $x_6^2 = 1$. Поэтому достаточно доказать интегрируемость Ψ в малых окрестностях U_i точек a_i $(i = 1, \ldots, 4)$. Так как $I_1\mu^2 \neq 4I_2^2$, то за локальные координаты в U_i можно взять переменные x_4 и x_5. Якобиан преобразования

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_4, x_5)}$$

аналитичен по x_4, x_5. По формуле замены переменных

$$\iint_{U_i} \Psi(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2 = \iint_{U_i} \Psi(x_4, x_5) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x_4, x_5)}\, dx_4 dx_5$$

Воспользуемся равенством

$$\Psi = -\frac{x_3x_6}{4(x_4^2 + x_5^2)}$$

Функции x_3 и x_6 аналитичны по x_4 и x_5 в U_i, причем $x_3 = 0$, когда $x_4 = x_5 = 0$. Следовательно, подынтегральная функция в переменных x_4, x_5 имеет вид

$$F = f(x_4, x_5) / (x_4^2 + x_5^2)$$

где f — аналитическая функция в U_i и $f(0, 0) = 0$. В полярных координатах (r, φ): $x_4 = r\cos\varphi$, $x_5 = r\sin\varphi$

$$\iint_{U_i} F\, dx_4 dx_5 = \iint_{U_i} \frac{f}{r}\, dr\, d\varphi$$

Так как f/r непрерывна и ограничена в проколотой окрестности точки a_i, то F интегрируема по Лебегу в области U_i $(i = 1, \ldots, 4)$. Утверждение доказано.

Теорема 3. При малых μ

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2 = 0$$

Для доказательства этой теоремы потребуется

Лемма 3. Пусть сужение функции $f(x_1 \ldots x_6)$ на инвариантный тор T^2 интегрируемо по Лебегу. Тогда

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2 = \oint_{T^2} \frac{f}{V_4}\, d\sigma$$

где V_4 — четырехмерный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\operatorname{grad} I_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ как на сторонах, а $d\sigma$ — элемент площади на T^2 как поверхности в $R^6\{x_1 \ldots x_6\}$.

Доказательство. В некоторой окрестности инвариантного тора $T^2\{\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi\}$ в R^6 можно сделать обратимую замену переменных

$$x_i = x_i(I_1, \ldots, I_4, \varphi_1, \varphi_2) \qquad (i = 1, \ldots, 6)$$

В новых переменных (I, φ) уравнения движения имеют вид (когда $I_3 = 0$)

$$I_i^{\cdot} = 0, \varphi_j^{\cdot} = \Phi_j (I_1 \ldots I_4); \quad i = 1, \ldots, 4; j = 1, 2$$

Эти уравнения имеют интегральный инвариант с плотностью

$$\rho = M \frac{\partial (x_1, \ldots, x_6)}{\partial (I_1, \ldots, I_4, \varphi_1, \varphi_2)}$$

где M — плотность интегрального инварианта в переменных $x_1, \ldots, x_6$. Так как $M \equiv 1$, а $\rho = 1$, когда $I_3 = 0$, то в этом случае

$$\frac{\partial (x_1, \ldots, x_6)}{\partial (I_1, \ldots, I_4, \varphi_1, \varphi_2)} = 1$$

Рассмотрим векторы

$$\xi_i = \left(\frac{\partial x_1}{\partial I_i}, \ldots, \frac{\partial x_6}{\partial I_i} \right) \quad (i = 1, \ldots, 4)$$

$$\eta_j = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \varphi_j}, \ldots, \frac{\partial x_6}{\partial \varphi_j} \right) \quad (j = 1, 2)$$

Очевидно, что

$$(\operatorname{grad} I_i, \xi_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, 4)$$

$$(\operatorname{grad} I_i, \eta_k) = 0 \quad (i = 1, \ldots, 4; k = 1, 2)$$

(δ_{ij} — символ Кронекера). Представим векторы ξ_i в виде $\xi_i' + \xi_i''$, где ξ_i' ортогональны η_1, η_2, а ξ_i'' разлагаются по η_1 и η_2. Тогда

$$V_6(\xi_1 \ldots \xi_4 \eta_1 \eta_2) = \left| \frac{\partial (x_1 \ldots x_6)}{\partial (I_1 \ldots I_4, \varphi_1, \varphi_2)} \right| = V_4 (\xi_i') V_2 (\eta_j) = 1 \tag{3.1}$$

Здесь через $V_n (a_1 \ldots a_n)$ обозначен n-мерный объем параллелепипеда, построенного на векторах $a_1, \ldots, a_n$ как на сторонах. Так как снова

$$(\operatorname{grad} I_i, \xi_j') = \delta_{ij}$$

то

$$V_4 (\operatorname{grad} I_i) \; V_4 (\xi_j') = 1$$

Учитывая (3.1), получим, что

$$V_4 (\operatorname{grad} I_i) = V_2 (\eta_j)$$

Следовательно

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\varphi_1 d\varphi_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f V_2 (\eta_1, \eta_2)}{V_4 (\operatorname{grad} I_i)} d\varphi_1 d\varphi_2 = \oint_{T^2} \frac{f}{V_4} d\sigma$$

так как по определению элемента площади $d\sigma = V_2 (\eta_1, \eta_2) \, d\varphi_1 d\varphi_2$. Лемма доказана

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим преобразование $\pi : R^6 \to R^6$, определенное формулой $y = \pi (x)$, где $x = (x_1 \ldots x_6)$, а $y = (-x_1 - x_2 x_3 x_4 x_5 - x_6)$. Отображение π — линейное ортогональное преобразование — произведение трех зеркальных отражений относительно координатных гиперплоскостей. При малых μ каждый из двух инвариантных торов, составляющих совместный уровень интегралов, переходит в себя (см. доказательство леммы 1). Так как $\pi : T^2 \to T^2$ сохраняет площадь, то якобиан этого преобразования равен единице и, следовательно

$$\oint_{T^2} \frac{\Psi (\pi (x))}{V_4 (\pi (x))} d\sigma = \oint_{T^2} \frac{\Psi (x)}{V_4 (x)} d\sigma \tag{3.2}$$

По формуле Грамма

$$V_4 (\operatorname{grad} I_k) = \sqrt{\det (\operatorname{grad} I_i, \operatorname{grad} I_j)} \quad (i, j, k = 1, \ldots, 4)$$

Используя это соотношение, можно показать, что $V_4 (\pi (x)) = V_4 (x)$. Так как $\Psi (\pi (x)) = -\Psi (x)$, то из (3.2) следует равенство

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi (\varphi_1, \varphi_2) \, d\varphi_1 d\varphi_2 = \oint_{T^2} \frac{\Psi}{V_4} d\sigma = 0$$

Теорема доказана.

Следствие. Если μ мало и отношение частот ω_1/ω_2 иррационально, то главное движение линии узлов равно нулю.

Действительно, по теореме о равномерном распределении [6,12]

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\psi (t)}{t} = \lambda = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi (\varphi_1, \varphi_2) \, d\varphi_1 d\varphi_2 = 0$$

Автор благодарит В. В. Румянцева и Ю. А. Архангельского за внимание к работе.

Поступила 17 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М., Гостехиздат, 1953.
2. *Сретенский Л. Н.* Движение гироскопа Горячева — Чаплыгина. Изв. АН СССР. ОТН, 1953, № 1.
3. *Архангельский Ю. А.* Движение быстрого гироскопа Горячева — Чаплыгина. Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 7.
4. *Докшевич А. И.* Качественное исследование решения Горячева — Чаплыгина. В сб. Механика твердого тела, вып. 4 Киев, «Наукова думка», 1972.
5. *Горр Г. В.* Об одном движении тяжелого твердого тела в случае Горячева — Чаплыгина. ПММ, 1970, т 34, вып. 6.
6 *Arnold V. I , Avez A.* Ergodic problems of classical mechanics. N. Y., W. A. Benjamin, 1968.
7. *Козлов В. В.* Динамические системы, возникающие на инвариантных торах задачи Ковалевской ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.
8. *Постников М М.* Введение в теорию Морса М., «Наука», 1971.
9. *Шарлье К* Небесная механика. М , «Наука», 1966.
10. *Weyl H* Mean motion. I. Amer. J. Math., 1938, vol. 60, No. 4
11. *Бор Г.* Почти периодические функции. М —Л., Гостехиздат, 1934.
12. *Касселс Дж В. С.* Введение в теорию диофантовых приближений. М., Изд-во иностр. лит , 1961.