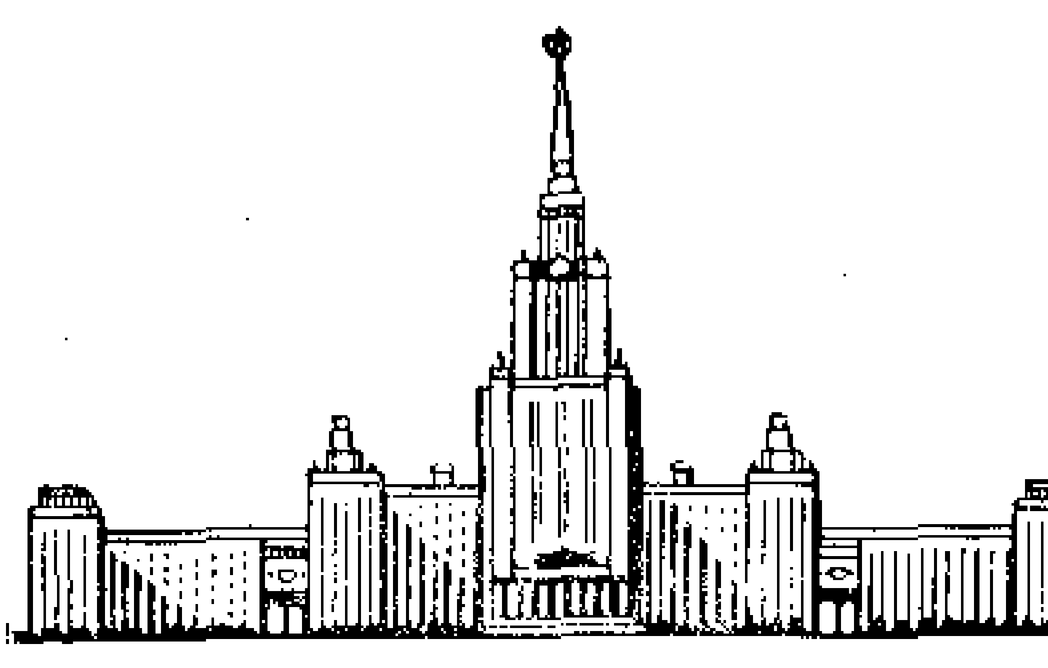
Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА,
МЕХАНИКА

6

Отдельный оттиск



1 9 7 6

Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1976

УДК 531.38

В. В. КОЗЛОВ

РАСЩЕПЛЕНИЕ СЕПАРАТРИС ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ЭЙЛЕРА — ПУАНСО

§ 1. *Постановка задачи.* Функция Гамильтона задачи о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой имеет следующий вид:

$$F = F_0 + \mu F_1, \tag{1}$$

где F_0 — кинетическая энергия (гамильтониан задачи Эйлера — Пуансо), а μF_1 — потенциальная энергия системы. Выделенный постоянный множитель μ, параметр Пуанкаре, — произведение веса тела на расстояние от центра тяжести до точки подвеса. Считаем параметр μ малым. Тогда рассматриваемая задача является возмущением интегрируемой задачи Эйлера — Пуансо.

При анализе канонических уравнений с гамильтонианом (1) будут использованы переменные Депри: $lghLGH$. Подробное описание этих канонических переменных содержится в работе [1]. Функция F не зависит от координаты h; следовательно, H — первый интеграл уравнений движения (интеграл площадей). Фиксируя его постоянную, сведем задачу к системе с двумя степенями свободы.

Пусть сначала $\mu=0$. В переменных Депри функцию F_0 запишем следующим образом:

$$F_0 = \frac{1}{2}(a\sin^2 l + b\cos^2 l)(G^2 - L^2) + \frac{c}{2}L^2,$$

где a, b, c — величины, обратные главным моментам инерции твердого тела. Далее всюду рассматриваем несимметричное тело и без ущерба общности считаем, что $a<b<c$. При каждом значении интеграла энергии F_0 уравнения задачи Эйлера — Пуансо имеют два изолированных периодических решения гиперболического типа — постоянные вращения тела вокруг средней оси инерции в противоположных направлениях. Записанные в переменных Депри, они таковы:

$$\Gamma_i : l = \pi(i-1), \quad g = G_0 bt, \quad L = 0, \quad G = G_0 \quad (F_0 = bG_0^2), \qquad i = 1,\ 2. \tag{2}$$

Через траектории решений (2) проходят две двумерные инвариантные асимптотические поверхности с уравнениями

$$L = \pm \frac{G_0 \sqrt{b-a}\sin l}{\sqrt{c - a\sin^2 l - b\cos^2 l}}, \qquad G = G_0. \tag{3}$$

Эти поверхности называются сепаратрисами. Они сплошь заполнены траекториями, неограниченно приближающимися при $t \to \pm\infty$ к траекториям периодических решений Γ_1 и Γ_2.

Если периодические решения гиперболического типа невозмущенной задачи невырожденны, то они не исчезнут при добавлении возмущения [2, гл. III] и через их траектории снова пройдут пары сепаратрис [2, гл. VII]. Однако возмущенные сепаратрисы не обязательно совпадут. Это явление, обнаруженное впервые Пуанкаре [3, § 19], называется расщеплением сепаратрис. Оно коренным образом рознит поведение траекторий невозмущенной и полной систем. Из существования расщепленных сепаратрис вытекает, например, расходимость рядов многочисленных вариантов теории возмущений.

Невырожденность периодических решений (2) задачи Эйлера — Пуансо, установленная в работе [4], позволяет рассмотреть задачу о расщеплении сепаратрис (3) при малых значениях параметра μ.

§ 2. *Расщепление сепаратрис задачи Эйлера — Пуансо.* Рассмотрим поведение асимптотических поверхностей (3) при малых μ в случае, когда центр тяжести тела лежит на средней оси инерции. При этом возмущающая функция F_1 представима следующим образом:

$$F_1 = \frac{H}{G}\sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} \cdot \cos l + \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \cdot \left(\frac{L}{G}\cos l \cos g - \sin l \sin g\right).$$

Теорема. Если центр тяжести тела находится на средней оси инерции, то асимптотические поверхности (3) расщепляются при малых значениях параметра μ.

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай, когда в первом уравнении системы (3) стоит знак плюс. В другом случае доказательство аналогично.

Уравнения асимптотической поверхности, проходящей через траекторию возмущенного периодического решения Γ_1, можно представить в виде

$$L = \frac{\partial S}{\partial l}, \quad G = \frac{\partial S}{\partial g}, \quad S = S_0 + \mu S_1 + \dots,$$

где S — функция от l и g, удовлетворяющая уравнению

$$F_0\left(l, \frac{\partial S}{\partial l}, \frac{\partial S}{\partial g}\right) + \mu F_1\left(l, g, \frac{\partial S}{\partial l}, \frac{\partial S}{\partial g}\right) = F_0 (= bG_0^2)$$

(см. [2, гл. VII]). Когда $\mu = 0$,

$$S = S_0 = G_0 g + \int_0^l \frac{\sqrt{b-a}\cdot G_0 \sin x}{\sqrt{c - a\sin^2 x - b\cos^2 x}}\,dx.$$

Что касается функции S_1, то она должна удовлетворять уравнению

$$(a\sin^2 l + b\cos^2 l)\left(G_0\frac{\partial S_1}{\partial g} - L\frac{\partial S_1}{\partial l}\right) + cL\frac{\partial S_1}{\partial l} +$$

$$+ \frac{H}{G_0}\sqrt{1 - \frac{L^2}{G_0^2}} \cdot \cos l + \sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}} \cdot \left(\frac{L}{G_0}\cos l \cos g - \sin l \sin g\right) = 0.$$

Здесь L согласно формуле (3) — функция от l. Функцию S_1 будем искать в виде

$$S_1 = X(l)\sin g + Y(l)\cos g + Z(l).$$

Коэффициенты X, Y и Z удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$(c - a\sin^2 l - b\cos^2 l)\, L\,\frac{dX}{dl} - G_0(a\sin^2 l + b\cos^2 l)\,Y = \sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}}\cdot\sin l,$$

$$(c - a\sin^2 l - b\cos^2 l)\, L\,\frac{dY}{dl} + G_0(a\sin^2 l + b\cos^2 l)\,X =$$

$$= -\sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}}\cdot\frac{L}{G_0}\cos l,$$

$$(c - a\sin^2 l - b\cos^2 l)\, L\,\frac{dZ}{dl} = -\frac{H}{G_0}\sqrt{1 - \frac{L^2}{G_0^2}}\cdot\cos l.$$

Два первых уравнения этой системы удобно записать в форме

$$\frac{dX}{dl} - f(l)\,Y = \varphi_1, \qquad \frac{dY}{dl} + f(l)\,X = \varphi_2,$$

$$f(l) = \frac{a\sin^2 l + b\cos^2 l}{\sqrt{b-a}\,\sin l\,\sqrt{c - a\sin^2 l - b\cos^2 l}},$$

$$\varphi_1 = \sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}}\,\frac{\sin l}{L\,(c - a\sin^2 l - b\cos^2 l)}, \tag{4}$$

$$\varphi_2 = -\sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}}\cdot\frac{\cos l}{G_0\,(c - a\sin^2 l - b\cos^2 l)}.$$

Введем комплекснозначные функции $\psi = X + iY$ и $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$. Уравнения (4) предстанут в следующем виде:

$$\frac{d\psi}{dl} + if(l)\,\psi = \varphi(l).$$

Так как это уравнение линейно по ψ, его общее решение есть

$$\psi = e^{-i\theta(l)}\int_{\alpha}^{l} e^{i\theta(x)}\varphi(x)\,dx, \qquad \theta = \int f(x)\,dx. \tag{5}$$

Здесь α — произвольная постоянная. Интеграл $\int f(x)\,dx$ можно вычислить. Он равен

$$\theta(x) = \arcsin\sqrt{\frac{b-a}{c-a}}\cos x +$$

$$+ \frac{b}{\sqrt{(b-a)(c-b)}}\ln\frac{\sqrt{c-a}\cdot\sin x}{\sqrt{c - a\sin^2 x - b\cos^2 x} + \sqrt{c-b}\,\cos x}.$$

Поскольку функция $\psi(l)$ должна быть аналитична при $l=0$, а $\exp - i\theta(l)$ имеет особенность в этой точке, в формуле (5) постоянную α надо положить равной нулю.

Аналогично можно записать уравнения для асимптотической поверхности, проходящей через траекторию возмущенного периодического решения Γ_2:

$$L = \frac{\partial S'}{\partial l}, \quad G = \frac{\partial S'}{\partial g}, \quad S' = S_0' + \mu S_1 + \ldots,$$

$$S_0' = G_0 g + \int_{\pi}^{l} \frac{\sqrt{b-a}\, G_0 \sin x}{\sqrt{c - a\sin^2 x - b\cos^2 x}}\, dx, \quad S_1' = X'(l)\sin g + Y'(l)\cos g + Z'(l),$$

$$\psi' = X' + iY' = e^{-i\theta(l)} \int_{\pi}^{l} e^{i\theta(x)} \varphi(x)\, dx.$$

Предположим, что эти сепаратрисы совпадают. Тогда, очевидно, $\psi = \psi'$ и, следовательно, интеграл

$$I = \int_0^{\pi} e^{i\theta(x)} \varphi(x)\, dx$$

должен равняться нулю. Учитывая равенство

$$\exp i \arcsin \sqrt{\frac{b-a}{c-a}} \cos x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c-a}} \left(\sqrt{c - a\sin^2 x - b\cos^2 x} + i\sqrt{b-a} \cdot \cos x \right),$$

записываем этот интеграл в явном виде:

$$I = \frac{1}{G_0} \sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}} \sqrt{\frac{c-a}{b-a}} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sqrt{c-a}\sin x}{\sqrt{c - a\sin^2 x - b\cos^2 x} + \sqrt{c-b}\cos x} \right)^{i\beta} \times$$

$$\times \frac{dx}{c - a\sin^2 x - b\cos^2 x},$$

где $\beta = \frac{b}{\sqrt{(b-a)(c-b)}}$. Выполним замену переменной по формуле

$$x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c-a}{c-b}} \frac{1-t^2}{t}, \qquad 0 < t < \infty.$$

Тогда

$$I = \frac{2\sqrt{1 - \frac{H^2}{G_0^2}}}{G_0 \sqrt{(c-b)(b-a)}} \int_0^{\infty} \frac{t^{i\beta}}{1+t^2}\, dt.$$

Интеграл в этой формуле легко вычисляется с помощью вычетов. Он равен

$$\frac{\pi}{e^{\pi\beta/2} + e^{-\pi\beta/2}}.$$

Следовательно, $I \neq 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Отметим, что хотя при малых $\mu \neq 0$ возмущенные асимптотические поверхности не совпадают, однако в общем случае всегда пересекаются по бесконечному множеству точек [3, § 19]. Через эти точки проходят траектории двояко-асимптотических решений, неограниченно приближающиеся при $t \to \pm\infty$ к траекториям возмущенных периодических решений Γ_1 и Γ_2.

§ 3. Возмущение сепаратрис в случае Гесса—Аппельрота. Расщепление сепаратрис — типичная картина в фазовом пространстве возмущенной задачи. Однако в задаче о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой сепаратрисы расщепляются не всегда. Рассмотрим случай Гесса—Аппельрота, выделяемый условием [5]:

$$\xi\sqrt{c-b}+\zeta\sqrt{b-a}=0.$$

(Здесь (ξ, 0, ζ) — координаты центра тяжести в главных осях эллипсоида инерции.) Уравнения движения имеют частный интеграл (типа $\Phi=0$, когда $\Phi=0$), который в переменных Депри можно записать так:

$$L=\frac{G\sqrt{b-a}\sin l}{\sqrt{c-a\sin^2 l-b\cos^2 l}}. \tag{6}$$

Частный интеграл (6) существует при всех значениях параметра μ *и аналитичен по μ, поскольку от μ он вообще не зависит.*

Если $\mu=0$, интеграл энергии и частный интеграл (6) высекают в фазовом пространстве асимптотическую поверхность к периодическим решениям — постоянным вращениям вокруг средней оси инерции. Покажем, что эта инвариантная поверхность не распадается при малых значениях параметра μ. Будем рассматривать только невертикальные постоянные вращения, так как в противном случае периодические решения вырождаются в положении равновесия и задача о сепаратрисах теряет смысл.

При $\mu=0$ инвариантная поверхность является двумерным тором T^2 и фазовое векторное поле на нем имеет два замкнутых цикла γ_1 и γ_2, которые, конечно, совпадают с постоянными вращениями вокруг средней оси инерции Γ_1 и Γ_2. Циклы γ_1 и γ_2 невырожденны, что следует из невырожденности периодических решений Γ_1 и Γ_2 (см. [4]). При малых μ инвариантный тор T^2 не исчезнет, а лишь немного изменит свое положение в фазовом пространстве. Так как векторное поле на нем тоже мало изменится, замкнутые циклы γ_1 и γ_2 не исчезнут и будут периодическими решениями возмущенной задачи. По теореме о неявных функциях, возмущения замкнутых циклов γ_1 и γ_2 совпадут с возмущениями периодических решений Γ_1 и Γ_2. Следовательно, инвариантная асимптотическая поверхность, высекаемая в фазовом пространстве интегралом энергии (1) и частным интегралом (6), при малых значениях параметра μ является замкнутой сепаратрисой возмущенных постоянных вращений вокруг средней оси инерции. Утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Депри А. Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости. — «Механика». Период. сб. перев. ин. статей, 1968, вып. 2, с. 3—9.
2. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. — В кн.: Пункаре А. Избр. труды, т. 1. М., 1971.
3. Пуанкаре А. О проблеме трех тел и об уравнениях динамики. — В кн.: Пуанкаре А. Избр. труды, т. 2. М., 1972.

4. Козлов В. В. Новые периодические решения в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. — «Прикл. матем. и механ.», 1975, **39**, вып. 3, с. 407—414.
5. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. М., 1953.

Поступила в редакцию
22.3 1976 г.

Кафедра
теоретической механики

V. V. Kozlov

SPLITTING OF SEPARATRICES IN THE PERTURBED EULER—POINSOT PROBLEM

The motion of a heavy rigid body about a fixed point is considered as a perturbation of the Euler—Poinsot case. The splitting of the separatrices of this case is strictly established when the centre of gravity is transferred from the fixed point to a position on the middle principal axis.