АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Том 40

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1976

Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.31

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В. В. Козлов

(Москва)

Рассматривается задача о существовании периодических решений уравнений движения натуральных механических систем, когда область возможных движений D имеет края. Вводятся либрационные периодические решения систем со многими степенями свободы. Траектория такого решения диффеоморфна отрезку $[0, 1]$, ее концы лежат на границе D, и изображающая точка совершает колебательное движение по этой кривой. Существование либрационных решений доказывается в случае, когда область возможных движений диффеоморфна прямому произведению $N \times [0, 1]$, где N — гладкое компактное многообразие. Полученные результаты применяются к задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в ньютоновском поле сил.

1. Постановка задачи. Пусть M — гладкое компактное n-мерное многообразие, являющееся конфигурационным пространством натуральной механической системы с n степенями свободы. Кинетическую энергию обозначим T (T — гладкая функция в касательном расслоении конфигурационного пространства, квадратичная по скоростям), а потенциал через V (V — гладкая функция на M). Уравнения движения системы имеют первый интеграл — интеграл энергии: $T - V = h$. При фиксированном значении h из этого интеграла находим область возможных движений $D = \{h + V \geqslant 0\} \subset M$. Согласно принципу наименьшего действия в области D задача о нахождении решений уравнений движения сводится к задаче о геодезических линиях следующей метрики:

$$dp^2 = (h + V)\, ds^2$$

где ds^2 — риманова метрика на M, задающая кинетическую энергию (т. е. $T = {}^1/_2\,(ds/dt)^2$).

Следует различать два случая: 1) $h > \max_M(-V)$, 2) $h \leqslant \max_M(-V)$.

В первом случае D совпадает со всем конфигурационным пространством, и задача о существовании периодических решений уравнений движения сводится к нахождению замкнутых геодезических линий гладкого риманова многообразия (M, dp). Каждой замкнутой геодезической отвечают два различных периодических решения исходной задачи (движения по этой кривой в противоположных направлениях). По аналогии с системами с одной степенью свободы такие решения назовем вращениями. Существуют оценки числа замкнутых геодезических, зависящие отчасти от топологического строения M, отчасти от римановой метрики $d\rho$ [1]. Наилучшей универсальной нижней оценкой является пока 2 [2]. Таким образом, на $(2n-1)$-мерных уровнях интеграла энергии с постоянной $h > \max(-V)$ существуют по крайней мере четыре различных периодических решения.

Во втором случае у области D есть края, и метрика $d\rho$ имеет особенность: чем ближе подходим к границе D, тем меньше становится длина. В частности, длина любой кривой, лежащей на самой границе ($V = -h$), равна нулю.

Границу множества $N \subset M$ обозначим ∂N. Всюду ниже рассматриваются только такие постоянные энергии h, когда на ∂D нет критических точек потенциала V. Остальные значения h назовем критическими. В частности, критическим является $h = \max(-V)$. Множество критических значений имеет меру нуль [3]. При критических h на ∂D существуют положения равновесия рассматриваемой системы, а на соответствующих уровнях интеграла энергии — особые точки уравнений движения. При некритических h граница ∂D есть гладкое компактное $(n-1)$-мерное многообразие.

Поставим следующую задачу: существуют ли на соответствующих уровнях энергии периодические решения? Еще Уиттекер [4] и Биркгоф [5] рассматривали задачу существования замкнутых геодезических линий на римановом многообразии с краем, не имеющих с границей этого многообразия общих точек. В этих работах требуется, в частности, невырожденность метрики на границе и выпуклость самой границы. Ясно, что в поставленной задаче эти результаты не применимы.

2. Либрация в системах со многими степенями свободы. Положение системы в конфигурационном пространстве M обозначим буквой m ($m \in M$). Пусть $q = \{q_i\}$ ($i = 1 \ldots n$) — некоторые локальные координаты на M.

Лемма 1. Если $q_1(t)$ и $q_2(t)$ — два решения уравнений движения с начальными данными $q_1(0) = q_2(0) = q_0$, $q_1^{\cdot}(0) = -q_2^{\cdot}(0) = v_0$, то $q_1(\pm t) = q_2(\mp t)$.

Следствие. Если $q(t)$ — решение уравнений движения с начальными данными $q(0) = q_0$, $q^{\cdot}(0) = 0$, то $q(t) = q(-t)$.

Доказательство леммы 1. Если $q(t)$ — решение уравнений Лагранжа с лагранжианом $L = T + V$, и с начальными условиями (при $t = 0$) $q(0) = q_0$, $q^{\cdot}(0) = v_0$, то $q(-t)$ есть решение тех же уравнений с начальными условиями $q(0) = q_0$, $q(0)^{\cdot} = -v_0$. Для завершения доказательства остается использовать теорему единственности решений уравнений Лагранжа с положительно определенной квадратичной формой T.

Лемма 2. Не существует решения уравнений движения, траектория которого пересекает границу ∂D более чем в двух различных точках.

Следствие. Если при $t = 0$ точка $m \in \partial D$, то существует $\varepsilon > 0$, такое, что при $t \in (0, \varepsilon)$ точка $m \notin \partial D$.

Доказательство леммы 2. Предположим, что существует решение, траектория которого пересекает ∂D последовательно в трех точках a, b, c. Тогда точка m, двигаясь из точки a, через некоторое время попадает в точку b. Дойдя до b, точка m, согласно следствию из леммы 1, будет двигаться по той же траектории в противоположную сторону и через конечное время попадет снова в точку a. По следствию из леммы 1, точка m затем будет двигаться по той же траектории от a к b и т. д. Следовательно, точка m никогда не попадет в c. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Теорема 1. Если траектория некоторого решения уравнений движения имеет с ∂D две общие точки, то других общих точек нет и решение является периодическим.

Доказательство. Пусть γ — траектория этого решения. Согласно лемме 2 кривая γ имеет с ∂D только две общие точки. При этом точка m совершает периодические колебания между концами γ (по следствию из леммы 1).

Периодические решения, о которых идет речь в теореме 1, по аналогии с системами с одной степенью свободы назовем либрациями.

3. Построение последовательности отрезков геодезических линий. *Существование либраций будет доказано для случая, когда область возможных движений D диффеоморфна прямому произведению $N \times [0, 1]$, где N — гладкое компактное $(n-1)$-мерное многообразие.* Граница ∂D состоит из двух многообразий $\partial D'$ и $\partial D''$, диффеоморфных N. Без ущерба общности N можно считать связным.

Предлагается следующий метод построения либрационных периодических решений. Для фиксированной области $D = N \times [0, 1]$ рассматривается последовательность вложенных друг в друга подобластей

$$D_k = N \times [1 / (k + 2),\ 1 - 1 / (k + 2)] \quad (k = 1, 2 \ldots)$$

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset \ldots \subset D$$

границы которых ($\partial D_k'$ и $\partial D_k''$) при $k \to \infty$ равномерно стремятся к ∂D. Для каждой области D_k строятся отрезки геодезических линий в метрике $d\rho$ с концами на ∂D_k. Важно отметить, что метрика $d\rho$ уже невырождена на ∂D_k. Далее доказывается, что из последовательности построенных отрезков можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в метрике dS к геодезической в области D с концами на ∂D, и движение по этой геодезической периодично.

Теорема 2. В области D_k $(k = 1, 2 \ldots)$ существует отрезок геодезической γ_k в метрике $d\rho$ с концами на $\partial D_k'$ и $\partial D_k''$, причем длины γ_k равномерно по k ограничены сверху.

Доказательство. Рассмотрим гладкое многообразие $M' = N \times R$. Отождествим подмногообразие $N \times [0, 1] \subset M'$ с областью D. Фиксируем номер k и обозначим D_k через E. Метрика $d\rho$ определена в E и в некоторой окрестности множества E в M'. Пусть $d\rho'$ — гладкая метрика на M', такая, что риманово пространство $(M', d\rho')$ полно и $d\rho'$ совпадает с $d\rho$ на E. Такая метрика существует согласно утверждениям о гладком продолжении тензорных полей (см., например, [3]). Ясно, что геодезические в новой метрике $d\rho'$ совпадают на E с геодезическими линиями в метрике $d\rho$.

Пусть $m_1 \in \partial E'$ и $m_2 \in \partial E''$. Расстоянием $\rho(m_1, m_2)$ между точками m_1 и m_2 назовем точную нижнюю грань длин кусочно-гладких кривых с началом в m_1 и концом в m_2. Расстоянием ρ_E между $\partial E'$ и $\partial E''$ назовем точную нижнюю грань расстояний между любыми точками из $\partial E'$ и $\partial E''$. Так как $\rho(m_1, m_2)$ непрерывна на $\partial E' \times \partial E''$ и $\partial E'$, $\partial E''$ компактны, то на $\partial E'$ и $\partial E''$ существуют точки a_1 и a_2, расстояние между которыми равно ρ_E. Так как риманово пространство (M', dp') полно, то точки a_1 и a_2 можно соединить геодезической γ $(= \gamma_k)$ длины ρ_E [3]. Покажем, что γ лежит целиком в E. Действительно, если это не так, то существует часть γ, соединяющая некоторые точки из $\partial E'$ и $\partial E''$ и длина которой меньше ρ_E. Длина $\gamma = \gamma_k$ не превосходит длины любой кусочно-гладкой кривой в области D с концами на $\partial D'$ и $\partial D''$. Следовательно, длины γ_k равномерно по k ограничены сверху. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство существования либрационных периодических решений. *Теорема 3.* В области $D = N \times [0, 1]$ существует либрационное периодическое решение. Траектория этого решения не имеет самопересечений и ее концы лежат на $\partial D'$ и $\partial D''$.

Доказательство. Пусть $l_1, \ldots, l_k, \ldots$ — длины отрезков геодезических $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \ldots$ Очевидно, $0 < l_1 < \ldots < l_k < \ldots$. Пусть $l = \sup_k l_k$. За параметр на кривых γ_k можно взять длину дуги p, отсчитываемую от какого-нибудь конца. Ясно, что $0 \leqslant p \leqslant l_k$. Удобнее использовать другой параметр t, который при всех k изменяется от 0 до 1 и удовлетворяет условию $p = l_k t$. Очевидны неравенства

$$\rho(\gamma_k(p_1), \gamma_k(p_2)) \leqslant |p_1 - p_2|, \quad \rho(\gamma_k(t_1), \gamma_k(t_2)) \leqslant l_k\,|t_1 - t_2| \tag{4.1}$$
$$\rho(\gamma_k(t_1), \gamma_k(t_2)) \leqslant l\,|t_1 - t_2|$$

где $\rho(m_1, m_2)$ — расстояние между точками $m_1, m_2 \in D$ в метрике dp.

Обозначим через γ_k^n части геодезических γ_k, когда $t \in [1/n, 1 - 1/n]$ $(n = 3, 4\ldots)$. Покажем, что для любого n у границ $\partial D'$ и $\partial D''$ существуют окрестности U_n', U_n'', такие, что кривые γ_k^n при всех k имеют с ними пустое пересечение. Заметим, что кривые γ_k^n короче γ_k с обоих концов по крайней мере на $l_1 / n > 0$. Предположим, что, например, окрестности U_n' с таким свойством нет. Тогда на кривых γ_k^n существуют точки a_k, сколь угодно близкие (в метрике dS) к $\partial D'$ и, следовательно, к $\partial D_k'$. Соединим точку a_k с $\partial D_k'$ отрезком A_k малой длины. Рассмотрим кусочно-гладкую кривую γ_k', состоящую из этого отрезка и участка геодезической γ_k от точки a_k до $\partial D_k'$. Ее длина при больших k очевидно меньше l_k. Но это противоречит принципу построения кривых γ_k.

Значит, при фиксированном n кривые γ_k^n лежат в компакте $D' = D \setminus (U_n' \cup U_n'')$. Будем говорить, что последовательность точек $a_m \in D'$ сходится в метрике dp (ds) к точке $a \in D'$, если расстояние между a_m и a в метрике dp (ds) стремится к нулю при $m \to \infty$. Так как метрика dp невырождена на D', то определения сходимости в метриках dp и ds эквивалентны. Множество кривых γ_k^n равностепенно непрерывно. Это очевидно ввиду формул (4.1), которые справедливы и для γ_k^n. Поэтому по обобщенной теореме Арцела из любого бесконечного подмножества геодезических γ_k^n можно выбрать подпоследовательность $(\gamma_k^n)_u$ $(u = 1, 2 \ldots)$, равномерно сходящуюся в метрике ds к непрерывной кривой γ^n: $[1/n, 1-1/n] \to D$ [6]. Очевидно, что γ^n — геодезическая в метрике $d\rho$.

Пусть теперь n принимает значения 3, 4, 5.... Из последовательности γ_k^3 $(k = 1, 2, \ldots)$ можно выбрать подпоследовательность $(\gamma_k^3)_u$ $(u = 1, 2\ldots)$, равномерно сходящуюся к геодезической Γ_3: $[{}^1/_3, {}^2/_3] \to D$. Из бесконечного множества $(\gamma_k^4)_u$ $(u = 1, 2, \ldots)$ можно выбрать последовательность $((\gamma_k^4)_u)_v$ $(v = 1, 2, \ldots)$, равномерно сходящуюся к геодезической Γ_4: $[{}^1/_4, {}^3/_4] \to D$. Ясно, что $\Gamma_3 \subset \Gamma_4$. Этот процесс можно продолжить до бесконечности. В итоге получим последовательность вложенных друг в друга геодезических

$$\Gamma_3 \subset \Gamma_4 \subset \ldots \subset \Gamma_n \subset \ldots \quad (\Gamma_n\colon\ [1/n,\ 1-1/n] \to D)$$

Положим

$$\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n; \quad \Gamma: (0, 1) \to D$$

— геодезическая линия в метрике $d\rho$. Длины Γ_n равномерно по n ограничены сверху числом $l > 0$. Следовательно, длина геодезической Γ тоже не превосходит l. Кроме того, на Γ существуют две последовательности точек m_k' и m_k'', неограниченно приближающихся при $k \to \infty$ соответственно к $\partial D'$ и $\partial D''$.

Докажем, что кривая Γ не имеет самопересечений. Предположим противное, т. е. при некоторых $t = t_1$, t_2 $(0 < t_1 < t_2 < 1)$ имеет место равенство $\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $n = n(\varepsilon)$, такое, что $[t_1, t_2] \subset [1/n, 1-1/n]$ и $\rho(\gamma_n(t), \Gamma(t)) < \varepsilon$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Рассмотрим вместо γ_n кусочно-гладкую кривую γ_n', совпадающую с γ_n, когда $t \in [1/n, t_1] \cup [t_2, 1-1/n]$, а при $t \in (t_1, t_2)$ совпадающую с кратчайшей геодезической, соединяющей точки $\gamma_n(t_1)$ и $\gamma_n(t_2)$. Пусть L и L' — длины частей γ_n и γ_n', когда $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Очевидно, что $L \geqslant l_1 \mid t_1 - t_2 \mid$, а $L' < 2\varepsilon$. При малых ε кусочно-гладкая кривая γ_n', лежащая в D_n и соединяющая $\partial D_n'$ и $\partial D_n''$, короче γ_n. Но это противоречит тому, что γ_n имеет минимальную длину среди всех кусочно-гладких кривых, соединяющих границы D_n.

Осталось показать, что замыкание Γ $(\overline{\Gamma})$ есть геодезическая с концами на ∂D, и точка m движется по Γ периодически. Рассмотрим решение уравнений движения при следующих начальных данных: в момент времени $t = 0$ точка m лежит внутри D на Γ, скорость направлена вдоль Γ, а ее величина определяется по зафиксированному выше значению полной энергии h. Предположим для определенности, что при $t > 0$ движение m происходит в сторону границы $\partial D'$ (т. е. m побывает в точках m_k', близких к $\partial D'$). При этом имеет место следующая альтернатива: или за конечное время точка m попадет на $\partial D'$ или при всех $t > 0$ точка $m \notin \partial D'$. В первом случае по следствию из леммы 2, точка m, попав на $\partial D'$, будет двигаться по той же траектории в обратную сторону — к границе $\partial D''$. Здесь будет иметь место такая же альтернатива: или в некоторый момент времени

$m \in \partial D''$ или точка m никогда не попадет на границу. В первом случае, согласно теореме 1, точка m будет совершать периодическое движение по $\bar{\Gamma}$ и все доказано. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда m, двигаясь по Γ, никогда не попадет на ∂D. Покажем, что при этом точка m будет асимптотически приближаться к ∂D (здесь и ниже рассматривается сходимость относительно метрики ds). Через U_ε обозначим ε-окрестность в метрике ds множества ∂D. Если m не стремится к ∂D, то существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при произвольно больших t точка m находится вне U_{ε_0}. С другой стороны, точка m побывает в точках m_k' или m_k'', сколь угодно близких к ∂D. Начиная с некоторого номера k, эти точки будут лежать в $U_{\varepsilon_0/2}$. Расстояние в метрике dp между точками множеств $D \setminus U_{\varepsilon_0}$ и $D \cap U_{\varepsilon_0/2}$ ограничены снизу некоторым положительным числом. Следовательно, длина Γ бесконечна. Однако это не так.

Докажем теперь, что при некотором $\varepsilon > 0$ точка m не может находиться бесконечно долго в области $V_\varepsilon = \{h + V \leqslant \varepsilon\}$. Выберем ε_1 столь малым, что в V_{ε_1} потенциал V не имеет критических точек. Так как V_{ε_1} компактно, то существует конечное покрытие множества V_{ε_1} малыми областями $W_s \subset M$ $(s = 1, \ldots, N)$, в которых можно ввести глобально декартовы координаты. Оценим сначала $V^{\cdot}$ на V_{ε_1}. Для фиксированного s обозначим через $q_1, \ldots, q_n$ локальные координаты на W_s. По неравенству Коши — Буняковского

$$|V^{\cdot}| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} q_i^{\cdot}\right| \leqslant |\operatorname{grad} V| \sqrt{v}$$

где v — величина скорости точки m. Так как T — положительно определенная квадратичная форма, то в области W_s справедливы неравенства $c_{1,s}v^2 \leqslant T \leqslant c_{2,s}v^2$ $(c_{1,s},\ c_{2,s} > 0)$. Из интеграла энергии $T = h + V$ следует, что в V_{ε_1} кинетическая энергия $T \leqslant \varepsilon_1$. Следовательно, в области $V_{\varepsilon_1} \cap W_s$ *выполняется неравенство* $|V^{\cdot}| \leqslant c_{3,s}$.

Положим $C_3 = \max_s c_{3,s}$. Тогда на всем множестве V_{ε_1} справедливо неравенство $|V^{\cdot}| \leqslant C_3$. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_1$ пересечение $V_\varepsilon \cap W_s$ не пусто. Оценим в этой области

$$V^{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} q_i^{\cdot\cdot} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} q_i^{\cdot} q_j^{\cdot}$$

Воспользуемся преобразованием Лежандра и каноническими уравнениями

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}}, \quad q_i^{\cdot} = \frac{\partial T}{\partial p_i}, \quad p_i^{\cdot} = -\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Тогда

$$V^{\cdot\cdot} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial^2 T}{\partial p_i \partial p_j} \left(-\frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial^2 T}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial V}{\partial q_j} + \Phi_2$$

где Φ_2 — квадратичная форма по $q_i^{\cdot}$ с ограниченными на $V_{\varepsilon_1} \cap W_s$ коэффициентами. Значит, в области $V_\varepsilon \cap W_s$ имеет место неравенство $|\Phi_2| \leqslant c_{4,s}'\varepsilon$ $(c_{4,s} > 0)$. Выражение

$$(4.2) \qquad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial^2 T}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

есть скалярный квадрат вектора grad V *в метрике* T.

Так как форма T положительно определена и функция V не имеет в области V_{ε_1} критических точек, то существует $c_{5,s} > 0$, такое, что на $V_{\varepsilon_1} \cap W_s$ сумма (4.2) не меньше $c_{5,s} / 2$. Следовательно, в области $V_\varepsilon \cap W_s$ справедливо неравенство $V^{\cdot\cdot} \geqslant c_{5,s} - c_{4,s}\,\varepsilon$. Положим $C_4 = \max_s c_{4,s}'$, $C_5 = \min_s c_{5,s}$ $(C_4,\ C_5 > 0)$. Тогда во всей области V_ε имеет место оценка $V^{\cdot\cdot} \geqslant C_5 - C_4\varepsilon$. Так как C_3, C_4 и C_5 не зависят от ε, то существует $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$, такое, что на V_{ε_0} одновременно

$$|V^{\cdot}| \leqslant C_3, \quad V^{\cdot\cdot} \geqslant C_6 \quad (C_3,\ C_6 > 0)$$

Пусть при $t = 0$ *точка* m *находится в области* V_{ε_0}. Тогда $h + V \geqslant C_6 t^2 / 2 - C_3 t$. *Следовательно, время, через которое* m *покинет множество* $\{h + V \leqslant \varepsilon_0\}$, не превосходит положительного корня следующего уравнения:

$$C_6 x^2 / 2 - C_3 x = \varepsilon_0$$

Таким образом, высказанное выше утверждение доказано. Как следствие получим, что m не может асимптотически стремиться к ∂D при $t \to \infty$. Следовательно, в указанных альтернативах второй возможности нет. Теорема 3 доказана.

5. Приложение к задаче о вращении твердого тела с неподвижной точкой в ньютоновском поле сил. Эта натуральная механическая система *имеет три степени свободы, конфигурационное пространство которой есть* группа SO (3). *Задача инвариантна при действии группы вращений* $g^s (s \in [0, 2\pi))$ *относительно вертикальной оси. Группе* g^s *соответствует циклический интеграл — интеграл площадей.* Через j обозначим его постоянную.

Рассмотрим сначала вопрос о существовании периодических движений тела в трехмерном пространстве. Пусть $h = \omega$ — максимальное критическое значение интеграла энергии. При $h > \omega$ область возможных движений совпадает со всей SO (3). На любом римановом SO (3) существуют по крайней мере три различных замкнутых геодезических [1]. Им соответствуют шесть различных периодических движений твердого тела. При остальных некритических h каждая связная компонента области возможных движений, согласно [7,8], диффеоморфна $T^2 \times [0, 1]$ (T^2 — двумерный тор) *или* $S^1 \times D^2$ (S^1 — *окружность, а* D^2 — *двумерный диск*). *В первом случае, по теореме 3, существует по крайней мере одно либрационное периодическое движение тела.* Это периодическое решение уравнений движения лежит на нулевом уровне интеграла площадей, так как при $j \neq 0$ скорость тела никогда в нуль не обращается. Если $\gamma(t)$ — либрационное решение, то $g^s(\gamma)$ ($s \in [0, 2\pi)$) — тоже либрационное периодическое решение. Так как γ не является перманентным вращением, то $g^s(\gamma) \neq \gamma$ при $s \in (0, 2\pi)$. Следовательно, в области $T^2 \times [0, 1]$ существует целое однопараметрическое семейство либрационных движений.

Рассмотрим подробнее случай $j = 0$. Наличие группы симметрий позволяет свести задачу к системе с двумя степенями свободы факторизацией по g^s. Ясно, что $SO(3) / g^s = S^2$ (сфера Пуассона). Понижая по Раусу порядок системы в локальных обобщенных координатах ϑ, φ, ψ (углы Эйлера), получим натуральную систему с двумя степенями свободы, в которой

$$T = \frac{a\dot{\vartheta}^2}{2} + b\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + \frac{c\dot{\varphi}^2}{2}$$

где

$$\begin{aligned}
Ka &= AB\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta\,(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\\
Kb &= (B - A)\,C\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\\
Kc &= C\sin^2\vartheta\,(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\\
K &= A\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + B\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + C\cos^2\vartheta
\end{aligned}$$

(V — потенциал ньютоновского поля сил).

Нетрудно показать, что T — положительно определенная квадратичная форма. Докажем, что T и V, определенные при $\vartheta \neq 0, \pi$, аналитически продолжаются на всю сферу Пуассона. Этот факт очевиден для потенциала V. Рассмотрим форму T в локальных координатах $x = \sin\vartheta\sin\varphi$, $y = \sin\vartheta\cos\varphi$ на S^2, не имеющих особенностей в полюсах

$$T = \frac{\xi\dot{x}^2}{2} + \eta\dot{x}\dot{y} + \frac{\zeta\dot{y}^2}{2}$$

$$K\xi = \frac{ABx^2}{1 - x^2 - y^2} + BC, \quad K\eta = \frac{ABxy}{1 - x^2 - y^2}, \quad K\zeta = \frac{ABy^2}{1 - x^2 - y^2} + AC$$

$$K = Ax^2 + By^2 + C(1 - x^2 - y^2)$$

Так как форма T аналитически зависит от x и y при малых значениях этих переменных, то высказанное утверждение доказано.

К полученной натуральной системе можно применить изложенные выше результаты. При $h > \omega$ область возможных движений совпадает со всей сферой Пуассона. Так как на двумерной римановой сфере существуют по крайней мере три различных замкнутых несамопересекающихся геодезических, то в этом случае уравнения пониженной системы имеют шесть различных периодических решений [9]. При остальных некритических значениях h каждая связная компонента области возможных движений есть либо кольцо $S^1 \times [0, 1]$, либо диск D^2 [7,8]. В первом случае по теореме 3 существует хотя бы одно либрационное решение с несамопересекающейся траекторией. Вопрос о существовании периодических решений во втором случае остается открытым.

Замечание. Существование либрационного решения в кольцевой области приведенной системы вытекает, конечно, из результата о либрационных движениях тела в области $T^2 \times [0, 1] \subset SO(3)$.

Поступила 25 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Klingenberg W.* Closed geodesics. Ann. Math., 1969, vol. 89, No. 1.
2. *Фет А. И.* О периодической задаче вариационного исчисления. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 2.
3. *Постников М. М.* Введение в теорию Морса. М., «Наука», 1971.
4. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.— Л., Гостехиздат, 1937.
5. *Birkhoff G. D.* Dynamical systems with two degrees of freedom. Trans. Amer. Math. Soc., 1917, vol. 18, No. 2.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.
7. *Татаринов Я. В.* К исследованию фазовой топологии компактных конфигураций с симметрией. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1973, № 5.
8. *Татаринов Я. В.* Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1974, № 6.
9. *Люстерник Л. А., Шнирельман Л.* Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхности. Успехи матем. наук, 1947, т. 2, вып. 1.