АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Том 40

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

2

МОСКВА · 1976

УДК 531.31 : 517.51

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПУАНКАРЕ

В. В. Козлов

(Москва)

В заметке рассматривается поведение при $t \to +\infty$ интеграла

$$I(t) = \int_0^t f(\omega_1 t, \omega_2 t)\, dt$$

где $f(\varphi_1, \varphi_2)$ — непрерывная функция на двумерном торе $T^2 \{\varphi_1\varphi_2 \bmod 1\}$, а отношение частот ω_2 / ω_1 иррационально. Эта задача рассматривалась впервые Пуанкаре [1] и часто встречается при качественном исследовании динамических систем.

Хорошо известно [1, 2], что если

$$\int_0^1\int_0^1 f(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 > 0 \ (< 0)$$

то $I(t) \to +\infty$ $(-\infty)$ при $t \to +\infty$. Следовательно, особую трудность представляет случай, когда пространственное среднее функции f равно нулю. Пуанкаре показал на примерах [1], что в этом случае интеграл $I(t)$ может стремиться к $+\infty$ или $-\infty$ (как t^α, $0 < \alpha < 1$) и (самый интересный случай) быть неограниченным, но бесконечно много раз подходить сколь угодно близко к своему начальному значению (т. е. к нулю). В связи с этим естественно поставить вопрос о нахождении условий, при которых будет иметь место возвращаемость интеграла $I(t)$ (устойчивость по Пуассону). Первый шаг в его решении — исследование дискретного аналога этой задачи, которое позволит установить, что возвращаемость имеет место, если функция f дважды непрерывно дифференцируема.

1. Предположим, что на окружности $S^1 \{x \bmod 1\}$ задана непрерывная функция $f(x)$. Пусть α — некоторое иррациональное число. Составим сумму

$$S_N(\alpha, \varphi) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i\alpha + \varphi), \quad \varphi \in S^1$$

Если

$$\int_0^1 f(x)\, dx > 0 \ (< 0)$$

то, очевидно, сумма $S_N(\alpha, \varphi) \to +\infty$ $(-\infty)$ при $N \to \infty$ равномерно по φ.

Теорема 1. Пусть

$$f \in C^2(S^1) \ \text{и} \ \int_0^1 f(x)\, dx = 0$$

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и N_0 существует $N > N_0$, такое, что $|S_N(\alpha, \varphi)| < \varepsilon$ для всех $\varphi \in S^1$.

Доказательство. Все иррациональные числа разобьем на два класса. Класс K_1 составляют такие числа α, для которых неравенство

$$|n\alpha - m| < 1 / |n|^{3/2} \tag{1.1}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах. Остальные отнесем к классу K_2.

Пусть сначала $\alpha \in K_2$. Разложим функцию f в сходящийся ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{i2\pi nx} \left(|f_n| \leqslant \frac{c}{|n|^2},\ c > 0\right)$$

Тогда

$$S_N(\alpha, \varphi) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{i2\pi n(k\alpha+\varphi)} = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{i2\pi n\varphi} \frac{e^{i2\pi nN\alpha} - 1}{e^{i2\pi n\alpha} - 1} \tag{1.2}$$

Используя результаты работы [3], *нетрудно доказать, что тригонометрический* ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{f_n}{e^{i2\pi n\alpha} - 1} e^{i2\pi nx}$$

сходится и является рядом Фурье некоторой непрерывной функции $F(x)$ $(x \in S^1)$. Учитывая (1.2), получим, что $S_N(\alpha, \varphi) = F(N\alpha + \varphi) - F(\varphi)$. Теперь заключение теоремы становится очевидным.

При $\alpha \in K_1$ в неравенстве (1.1) числа m и n можно считать взаимно простыми. Если это не так, то пусть d $(d > 1)$ — их наибольший общий делитель. Положим $m = dm_1$, $n = dn_1$; тогда

$$|n_1\alpha - m_1| \leqslant \frac{1}{d^{5/2}|n_1|^{3/2}} < \frac{1}{|n_1|^{3/2}}$$

Очевидно, что таким преобразованием можно получить бесконечное число различных неравенств (1.1) со взаимно простыми m и n.

Оценим разность

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(k\alpha + \varphi) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\frac{m}{n} + \varphi\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(k\alpha + \varphi) - f\left(k\frac{m}{n} + \varphi\right) \right| \leqslant M_1 \sum_{k=0}^{n-1} \left| k\alpha - k\frac{m}{n} \right| \leqslant$$

$$\leqslant M_1 n \sum_{k=0}^{n-1} \left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \leqslant M_1 n^2 \left| \alpha - \frac{m}{n} \right| < \frac{M_1}{\sqrt{n}}$$

$$M_1 = \max_{x \in S^1} |f'(x)|$$

Следовательно

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(k\alpha + \varphi) \right| \leqslant \left| \sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\frac{m}{n} + \varphi\right) \right| + \frac{M_1}{\sqrt{n}} \tag{1.3}$$

Так как числа m и n взаимно просты, то точки на S^1, угловые координаты которых

$$\varphi,\ \varphi + \frac{m}{n},\ \varphi + 2\frac{m}{n},\ \ldots,\ \varphi + (n-1)\frac{m}{n}$$

расположены в вершинах правильного вписанного n-угольника. Так как $f \in C^2(S^1)$, *то по известному способу прямоугольников вычисления определенных интегралов, на* окружности S^1 существует точка ξ, такая, что

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\frac{m}{n} + \varphi\right) + \frac{f''(\xi)}{24n^2}$$

Отсюда

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\frac{m}{n} + \varphi\right) \right| \leqslant \frac{M_2}{24n}, \qquad M_2 = \max_{x \in S^1} |f''(x)|$$

Учитывая (1.3), получим окончательно

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(k\alpha+\varphi)\right| < \frac{M_1}{\sqrt{n}} + \frac{M_2}{24n}$$

Так как существует бесконечно много чисел n, удовлетворяющих этому неравенству, то для оставшихся $\alpha \in K_1$ теорема 1 тоже доказана.

2. Теперь обратимся к вопросу о возвращаемости интеграла $I(t)$.

Теорема 2. Если f непрерывна на T^2 и имеет две непрерывные производные по φ_2, а пространственное среднее функции f равно нулю, то для любых $\varepsilon > 0$ и T существует $t > T$, такое, что $|I(t)| < \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим на T^2 окружность $S^1 = \{\varphi_1, \varphi_2 : \varphi_1 = 0\}$ и на ней функцию

$$F(x) = \frac{1}{\omega_1}\int_0^1 f\left(\varphi_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}\varphi_1 + x\right) d\varphi_1, \quad x \in S^1$$

Очевидно равенство

$$I(na) = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(k\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = S_n\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}, 0\right), \quad a = \frac{1}{\omega_1} > 0$$

Нетрудно проверить, что функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Теперь заключение теоремы 2 вытекает из теоремы 1.

Замечание. Пример Пуанкаре [1], в котором $I(t) \to +\infty$ (или к $-\infty$), не противоречит теореме 2, так как нетрудно доказать, что функция f этого примера не имеет вторых производных по координатам φ_1 и φ_2.

3. В качестве примера рассмотрим колебания упругой струны длины d; пусть a — скорость распространения возмущений. Предположим, что в начальный момент времени ($t = 0$) струна неподвижна, левый конец постоянно закреплен, а правый начинает совершать периодические колебания по закону $f(t)$ ($f(0) = 0$) с периодом T. Задача определения вынужденных колебаний струны при $t \geqslant 0$ является смешанной задачей для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \{t, x\colon 0 \leqslant t < \infty, 0 \leqslant x \leqslant d\}$$

Обозначим это решение через $u(t, x)$.

Нетрудно доказать, что если отношение $d/(aT)$ рационально, что на струне существуют точки $x = \xi$, такие, что $u(t, \xi) \to \infty$ при $t \to \infty$ («параметрический резонанс»).

Теорема 3. Предположим, что $d/(aT)$ иррационально, функция f класса C^2. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и τ существует $t > \tau$, такое, что $|u(t, x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [0, d]$.

Доказательство. Используя основное свойство характеристического параллелограмма, получим равенство

$$u\left(2\frac{d}{a}n, x\right) = \sum_{i=1}^{n} f(t_{2i}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_{2i-1}) \tag{3.1}$$

$$t_{2i} = t_2 + 2(i-1)\frac{d}{a}, \quad t_{2i-1} = t_1 + 2(i-1)\frac{d}{a},$$

$$t_1 = \frac{d-x}{a}, \quad t_2 = \frac{d+x}{a}$$

Представим функцию $f(t)$ в виде $c + g(t)$, где c — среднее функции $f(t)$. Тогда равенство (3.1) можно переписать так:

$$u\left(2\frac{d}{a}n, x\right) = \sum_{i=1}^{n} g(t_{2i}) - \sum_{i=1}^{n} g(t_{2i-1}) \tag{3.2}$$

Так как среднее периодической функции $g(t)$ класса C^2 равно нулю, а отношение $d/(aT)$ иррационально, то по теореме 1 для любых $\varepsilon > 0$ и N_0 существует $N > N_0$, такое, что

$$\left|\sum_{i=1}^{N} g(t_{2i})\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \left|\sum_{i=1}^{N} g(t_{2i-1})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

равномерно по x. Учитывая (3.2), заключаем, что в момент времени $t = 2dN/a$ будет справедливо неравенство $|u(t, x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [0, d]$.

Поступила 19 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
2. *Arnold V. I., Avez A.* Problemes érgodiques de la mécanique classique. Paris, 1967. Gauthier-Villars.
3. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели I. Об отображениях окружности на себя. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1961, т. 25, № 1.