Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА,
МЕХАНИКА

1

Отдельный оттиск

1 9 7 6

Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№1 — 1976

УДК 531.01

В. В. КОЗЛОВ

НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ВБЛИЗИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему канонических уравнений

$$\dot{u}_i = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad \dot{v}_i = -\frac{\partial H}{\partial u_i}, \qquad i = 1 \ldots n, \ n \geqslant 2, \tag{1}$$

с функцией Гамильтона $H(u_1 \ldots u_n v_1 \ldots v_n, \alpha)$, аналитически зависящей от переменных (u, v) и параметра $\alpha \in (a, b)$. Предположим, что при всех α точка $u_i = v_i = 0$ $(i = 1 \ldots n)$ — положение равновесия системы уравнений (1). Функцию H можно представить в следующем виде:

$$H = H^{(2)} + H^{(3)} + \ldots,$$

где $H^{(s)}$ — однородная форма степени s по переменным (u, v). Коэффициенты этого разложения аналитичны по α.

§ 1. Теорема об отсутствии аналитических интегралов. Здесь и всюду ниже предполагается, что при всех $\alpha \in (a, b)$ собственные числа линеаризованных канонических уравнений чисто мнимы и различны. В этом случае существует каноническое преобразование $(u, v) \to (\xi, \eta)$, аналитичное по α, такое, что в новых переменных

$$H^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{2} (\xi_i^2 + \eta_i^2)$$

(ср. с [1]). В координатах (ξ, η) снова

$$H = H^{(2)} + H^{(m)} + H^{(m+1)} + \ldots; \qquad m \geqslant 3, \quad H^{(m)} \not\equiv 0.$$

Положим $\xi_i = \sqrt{2I_i} \sin \varphi_i$, $\eta_i = \sqrt{2I_i} \cos \varphi_i$ $(i = 1 \ldots n)$. Тогда

$$H^{(m)} = \sum_{0 \leqslant |m_1| + \ldots + |m_n| \leqslant m} B_{m_1 \ldots m_n} (I_1 \ldots I_n, \alpha)\, e^{i(m_1 \varphi_1 + \ldots + m_n \varphi_n)}$$

Коэффициенты $B_{m_1 \ldots m_n}$ аналитичны в области $D_\varepsilon \times (a, b)$;

$$D_\varepsilon = \{I_1^2 + \ldots + I_n^2 \leqslant \varepsilon; \ I_i \neq 0, \ i = 1 \ldots n\},$$

ε — малое положительное число.

Теорема 1. Предположим, что система уравнений (1) удовлетворяет следующим условиям:

1) частоты линеаризованных уравнений λ_i не связаны тождественным по α соотношением $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\lambda_i = 0$ с целыми m_i, $0 < \sum\limits_{i=1}^{n} |m_i|$;

2) при некотором $\alpha = \bar{\alpha}$ существуют $n-1$ линейно-независимых целочисленных векторов $(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_n)$, таких, что

$$0 < \sum_{i=1}^{n} |\bar{m}_i| \leqslant m, \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{m}_i\lambda_i = 0, \quad B_{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_n} \neq 0.$$

Тогда канонические уравнения (1) не имеют независимого от H интеграла, аналитического по каноническим переменным и параметру $\alpha \in (a, b)$.

Укажем основные моменты доказательства. Пусть $\Phi(\xi, \eta, \alpha)$ — интеграл канонических уравнений (1), аналитичный по всем переменным. Предположим, что при всех $\alpha \in (a, b)$ разложения функций H и Φ по степеням (ξ, η) сходятся, когда $\sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2) \leqslant r \ (r > 0)$. В уравнения (1) введем параметр $\mu \in (-1, 1)$ по формулам $\xi_i = \mu x_i$, $\eta_i = \mu y_i$. Функции H и Φ можно представить в виде степенных рядов по μ. Коэффициенты при μ^p — однородные формы степени p по (x, y); в свою очередь коэффициенты этих форм аналитически зависят от α. Эти ряды сходятся при всех $\mu \in (-1, 1)$ и $\alpha \in (a, b)$, если $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) \leqslant r$.

В новых канонических переменных (x, y) уравнения (1) будут иметь тот же вид, а функция Гамильтона

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^2}{2} (x_i^2 + y_i^2) + \mu^{(m-2)} H^{(m)} + \ldots$$

Эти уравнения имеют первый интеграл $\Phi = \mu^s\Phi^{(s)} + \mu^{s+1}\Phi^{(s+1)} + \ldots$ $(s \geqslant 1)$ или (отбрасываем постоянный множитель μ^s) $\Phi = \Phi^{(s)} + \mu\Phi^{(s+1)} + \ldots$

Преобразование $(\xi, \eta) \to (I, \varphi) : \xi_i = \sqrt{2I_i} \sin\varphi_i$, $\eta_i = \sqrt{2I_i} \cos\varphi_i$ — каноническое. В новых переменных

$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i I_i + \mu^{(m-2)} H^{(m)} + \ldots = H_0 + \mu^{(m-2)} H_1 + \ldots,$$

$$\Phi = \Phi^{(s)} + \mu\Phi^{(s+1)} + \ldots = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \ldots,$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i I_i, \ H_1 = H^{(m)}, \ldots, \Phi_0 = \Phi^{(s)}, \ \Phi_1 = \Phi^{(s+1)}, \ldots$$

Функции H и Φ аналитичны по $(I, \varphi, \mu, \alpha)$ в области

$$D_r \times T^n \{\varphi_1 \ldots \varphi_n \bmod 2\pi\} \times (-1, 1) \times (a, b).$$

Предположим, что функции H и Φ независимы при $\alpha = \bar{\alpha}$. Тогда существует первый интеграл $F = F_0 + \mu F_1 + \ldots$, аналитичный в области $D \times T^n \times (-\rho, \rho) \times (a, b)$ $(D \subset D_r, \ \rho > 0)$, такой, что функции H_0 и F_0 независимы при $\alpha = \bar{\alpha}$ (ср. с [2], гл. V).

Так как скобка Пуассона $(H, F) \equiv 0$, то будут справедливы равенства

$$(H_0, F_0) = 0, \ldots, (H_0, F_{m-3}) = 0, \ (H_0, F_{m-2}) + (F_0, H_1) = 0. \qquad (2)$$

Первое из этих соотношений показывает, что F_0 — первый интеграл канонических уравнений с гамильтонианом H_0. Так как F_0 аналитична по α, из условия 1) теоремы следует, что F_0 не зависит от $\varphi_1 \ldots \varphi_n$.

Пусть

$$F_{m-2} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_{m_1 \ldots m_n}(I_1 \ldots I_n, \alpha)\, e^{i(m_1\varphi_1 + \ldots + m_n\varphi_n)} .$$

Из последнего равенства системы (2) вытекают соотношения

$$B_{m_1 \ldots m_n}\left(m_1 \frac{\partial F_0}{\partial I_1} + \ldots + m_n \frac{\partial F_0}{\partial I_n}\right) = C_{m_1 \ldots m_n}(m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n).$$

Пусть теперь $\alpha = \bar{\alpha}$, $m_i = \bar{m}_i$ $(i = 1 \ldots n)$. Тогда при всех $(I_1 \ldots I_n) \in D$ одновременно

$$\bar{m} \frac{\partial H_0}{\partial I_1} + \ldots + \bar{m}_n \frac{\partial H_0}{\partial I_n} = 0, \ \bar{m}_1 \frac{\partial F_0}{\partial I_1} + \ldots + \bar{m}_n \frac{\partial F_0}{\partial I_n} = 0.$$

Так как согласно условию 2) теоремы существуют $n-1$ таких линейно-независимых векторов $(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_n)$, то при $\alpha = \bar{\alpha}$ функции H_0 и F_0 зависимы. Следовательно, при $\alpha = \alpha$ зависимы H и Φ.

Осталось показать, что функции H и Φ зависимы при всех α. Это доказывается так же, как аналогичное утверждение в [2, гл. V]. При этом используется следующее вспомогательное предложение: пусть $f = f(z_1 \ldots z_n)$ и $g = g(z_1 \ldots z_n)$ — зависимые аналитические функции в некоторой окрестности точки $z_1 = \ldots = z_n = 0$. Предположим, что эта точка — невырожденная критическая точка функции f. Тогда существует функция $\Psi(z)$, аналитическая на $(-\varepsilon, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, такая, что в некоторой малой окрестности $\sum_{i=1}^{n} z_i^2 < r \ (r > 0)$ справедливо равенство $g = \Psi(f)$.

Замечания. Приложения теоремы 1 содержат проверку лишь конечного числа неравенств, в то время как в классической теореме Пуанкаре [2, гл. V] аналогичных неравенств бесконечно много. Кроме того, в теореме Пуанкаре при некоторых значениях параметра уравнения должны быть интегрируемыми. В нашей теореме этого не требуется.

§ 2. Приложение к плоской ограниченной круговой задаче трех тел. Уравнения движения пробного тела в некоторой вращающейся системе координат имеют гамильтонов вид [3]:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = 1,\ 2, \qquad (3)$$

где

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - F(x_1,\ x_2),$$

$$F = \frac{1-\mu}{\sqrt{(x_1+\mu)^2 + x_2^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x_1+\mu-1)^2 + x_2^2}}.$$

Эта система имеет положения равновесия в точках $x_1 = \frac{1}{2} - \mu$, $x_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_1 = y_2 = 0$, которые называются лагранжевыми решениями или треугольными точками либрации.

Теорема 2. Канонические уравнения (3) не имеют в окрестности точек либрации первого интеграла, независимого от H, аналитического по каноническим переменным и параметру μ.

Доказательство. Пусть (a, b) — малый интервал, содержащий точку $\bar{\mu} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{45}\sqrt{1833}\right)$. В этом интервале изменения μ собственные числа линеаризованной системы чисто мнимы и различны, отношение частот λ_1/λ_2 непостоянно. При $\mu = \bar{\mu}$ имеет место равенство $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$, причем соответствующий коэффициент $B_{1,-2}$ отличен от нуля [4]. После этих замечаний теорема 2 вытекает из теоремы 1 при $n=2$.

§ 3. Приложение к задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Эта задача имеет три степени свободы, уравнения движения которой допускают два аналитических интеграла: энергии и площадей.

Ограничимся случаями, когда эллипсоид инерции тела симметричен, а центр тяжести находится в экваториальной плоскости этого эллипсоида. Среди таких случаев находится наибольшее число интегрируемых.

В стандартных обозначениях [5] функция Гамильтона задачи имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{p_\theta^2}{A} + \frac{p_\psi^2}{C} + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos\theta)^2}{A \sin^2\theta}\right] + \mu \sin\theta \sin\varphi, \qquad \mu > 0. \tag{4}$$

Теорема 3. Канонические уравнения с гамильтонианом (4) допускают третий независимый аналитический интеграл, находящийся в инволюции с интегралом площадей, только в случае кинетической симметрии ($A=C$) и в случае Ковалевской ($A=2C$).

Доказательство. Единицы измерения всегда можно подобрать так, что $A=\mu=1$. Координата p_ψ есть интеграл площадей. Уравнения движения приводятся к системе с двумя степенями свободы с функцией Гамильтона (4), в которую p_ψ входит как параметр. Поэтому достаточно показать, что эти уравнения не имеют, кроме H, другого независимого аналитического интеграла, аналитичного по p_ψ.

При любом значении p_ψ точка $(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi) = \left(0, 0 \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ — положение равновесия приведенной системы. Положим $p_\theta = y_1$, $p_\varphi = y_2$, $\theta = \frac{\pi}{2} + x_1$, $\varphi = -\frac{\pi}{2} + x_2$. Тогда

$$H = H^{(2)} + H^{(4)} + \dots,$$

$$H^{(2)} = \frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2C} + p_\psi y_2 x_1 + \frac{(1 + p_\psi^2)}{2} x_1^2 + \frac{x_2^2}{2},$$

$$H^{(4)} = \frac{5}{6} p_\psi y_2 x_1^3 + \frac{x_1^2 y_2^2}{2} - \frac{x_1^2 x_2^2}{4} + \left(\frac{1}{3} p_\psi^2 - \frac{1}{24}\right) x_1^4 - \frac{x_2^4}{24}.$$

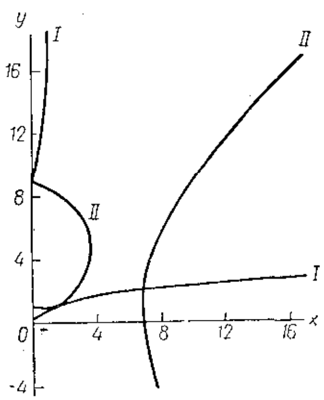
Характеристическое уравнение линейной системы есть

$$\lambda^4 + (1 + p_\psi^2 + C^{-2})\lambda^2 + C^{-2}(1 + p_\psi^2) - p_\psi^2 = 0. \quad (5)$$

Положим для удобства $p_\psi^2 = x$, $C^{-2} = y$. Тогда $(x, y) \in R_+^2 = \{x, y : x > 0, \ y > 0\}$. Корни уравнения (5) чисто мнимы, если $y > x/1 + x$. Обозначим через E подобласть R_+^2, где выполняется это неравенство.

Отношение частот λ_1/λ_2 равно трем, если параметры x и y связаны соотношением

$$I: 9x^2 - 82xy + 9y^2 + 118x - 82y + 9 = 0. \quad (6)$$



Это — уравнение гиперболы; ее ветви при $x>0$, $y>0$ лежат целиком в E.

Из неравенства треугольника для главных центральных моментов инерции следует, что $y \geqslant \frac{1}{2}$. Для фиксированного $y_0 \geqslant \frac{1}{2}$ существует $x_0>0$, такое, что точка (x_0, y_0) удовлетворяет уравнению (6). Рассмотрим малый интервал (a, b) изменения параметра x, включающий точку x_0. При $x \in (a, b)$, $y = y_0$ корни уравнения (5) чисто мнимы и различны. Когда $x = x_0$, то частоты λ_1 и λ_2 связаны соотношением $\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$. Остается выяснить, когда отличен от нуля вековой коэффициент $B_{1,-3}$.

После линейного канонического преобразования $(x_1 y_1 x_2 y_2) \to (q_1 p_1 q_2 p_2)$ по формулам

$$x_1 = q_1 - p_2,\ x_2 = \beta^{-1}(q_2 - p_1),\ y_1 = \beta^{-1}[\alpha q_2 + (\beta - \alpha)p_1],\ y_2 = \alpha q_1 + (\beta - \alpha)p_2,$$

$$\beta = \alpha + \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{\sqrt{x}}{\alpha} - \sqrt{x}\alpha - 1 - x + y = 0,$$

форма $H^{(2)}$ запишется в следующем виде:

$$H^{(2)} = \frac{A_1}{2} p_1^2 + \frac{B_1}{2} q_1^2 + \frac{A_2}{2} p_2^2 + \frac{B_2}{2} q_2^2,$$

$$A_1 = \frac{1}{1 + \alpha^2}, \quad B_1 = \alpha^2 y + 2\alpha\sqrt{x} + 1 + x,$$

$$A_2 = \frac{y - 2\alpha\sqrt{x} + (1 + x)\alpha^2}{\alpha^2}, \quad B_2 = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}.$$

Перейдем к полярным координатам (I, φ):

$$q_1 = \sqrt{2I_1\sqrt{\frac{A_1}{B_1}}}\sin\varphi_1, \quad p_1 = \sqrt{2I_1\sqrt{\frac{B_1}{A_1}}}\cos\varphi_1,$$

$$q_2 = \sqrt{2I_2\sqrt{\frac{A_2}{B_2}}}\sin\varphi_2, \quad p_2 = \sqrt{2I_2\sqrt{\frac{B_2}{A_2}}}\cos\varphi_2.$$

В новых переменных

$$H^{(4)} = \sum_{0 \leqslant |m_1| + |m_2| \leqslant 4} B_{m_1 m_2} e^{i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)}.$$

Условие равенства нулю $B_{1,-3}$ можно записать следующим образом:

$$\text{II}: 9x^4 - 10x^3y + x^2y^2 - 17x^3 + 58x^2y - 7xy^2 - 375x^2 -$$
$$- 86xy - 170y^2 + 541x + 1700y - 1530 = 0. \qquad (7)$$

Алгебраические кривые (6) и (7) изображены в R_+^2 на рисунке. Анализ показывает, что они пересекаются только в двух точках ($^4/_3$, 1) и (7, 2), которым отвечают интегрируемые случаи кинетической симметрии и Ковалевской.

Замечание. С помощью теоремы 1 можно исследовать интегрируемость общего случая задачи о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Правда, при этом вычисления будут более громоздкими и, по-видимому, дополнительный аналитический интеграл также существует только в известных случаях (ср. с [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М., ИЛ, 1959.
2. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. труды, т. I. М., «Наука», 1971.
3. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М., «Мир», 1973.
4. Маркеев А. П. Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел. «Прикл. матем. и механ.», 33, вып. 1, 112—116, 1969.
5. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.—Л., ОНТИ, 1937.
6. Козлов В. В. Несуществование дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. «Вестн. Моск. ун-та», матем., механ., № 1, 105—110, 1975.

Поступила в редакцию
11.5 1975 г.

Кафедра
теоретической механики

V. V. Kozlov

NON-EXISTENCE OF ANALYTIC INTEGRALS NEAR EQUILIBRIUM POSITIONS OF HAMILTONIAN SYSTEMS

The paper proves a theorem on Liouville-type non-integrability of Hamiltonian systems near elliptic equilibrium positions. This result is applied to a restricted three-body problem and to the problem of the motion of a heavy rigid body about a fixed point.