АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Том 39

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1975

Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.38

НОВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

В. В. Козлов

(Москва)

Теория рождения периодических решений в канонических системах дифференциальных уравнений, близких к интегрируемым, была разработана Пуанкаре для целей небесной механики. В данной работе устанавливается применимость этих результатов к классической задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой. Тем самым удается существенно расширить класс периодических решений, известных в этой задаче.

1. Возмущение равномерных вращений. Функция Гамильтона рассматриваемой задачи имеет вид

$$F = F_0 + \mu F_1 \tag{1.1}$$

Здесь F_0 — живая сила, μF_1 — потенциальная энергия системы (выделенный постоянный множитель μ — это произведение веса тела на расстояние от центра тяжести до точки закрепления). Канонические уравнения с гамильтонианом (1.1) имеют циклический интеграл — интеграл площадей; фиксируя его постоянную, сведем рассматриваемую задачу к системе с двумя степенями свободы, которую будем называть приведенной.

Когда $\mu = 0$, будем иметь случай Эйлера — Пуансо. В этой невозмущенной задаче существуют частные изолированные периодические решения — равномерные вращения вокруг главных осей эллипсоида инерции. Выясним, будут ли уравнения с функцией Гамильтона (1.1) допускать периодические решения, если $\mu \neq 0$, но очень мало.

Случай несимметричного твердого тела. Теорема 1. Периодические решения невозмущенной приведенной задачи — невертикальные постоянные вращения вокруг главных осей инерции — не исчезают при добавлении возмущения, а при малых μ переходят в периодические решения возмущенной задачи, аналитически зависящие от малого параметра μ и постоянной энергии.

Следовательно, на почти всех трехмерных уровнях энергии приведенная возмущенная система имеет шесть периодических решений при малых значениях μ.

Так как будут рассматриваться невертикальные равномерные вращения невозмущенной задачи, то для доказательства этого утверждения можно перейти к каноническим переменным Депри (l, g, h, L, G, H) [1]. Функция (1.1), записанная в этих координатах, не содержит угловой переменной h. Следовательно, H — первый интеграл канонических уравнений (интеграл площадей); понижение порядка системы достигается фиксированием его постоянной. Пусть A, B, C — главные центральные моменты инерции твердого тела. Будем считать, что $A > B > C$. Гамильтониан задачи Эйлера — Пуансо в переменных Депри имеет вид

$$F_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right)(G^2 - L^2) + \frac{L^2}{2C}$$

Рассмотрим вращения вокруг меньшей оси инерции (с периодом T)

$$L = 0,\ G = G_0,\ l = \frac{\pi}{2},\ g = \frac{G_0}{A}t + g_0,\ T = \frac{2\pi A}{G_0} \tag{1.2}$$

Применяя метод малого параметра, обозначим отклонения от периодического решения (1.2) при $\mu = 0$ соответственно через L_1, G_1, l_1 и g_1. Тогда линейные уравнения

$$L_1^{\bullet} = \frac{B-A}{AB}G_0^2 l_1,\ G_1^{\bullet} = 0,\ l_1^{\bullet} = \frac{A-C}{AC}L_1,\ g_1^{\bullet} = \frac{G_1}{A} \tag{1.3}$$

суть уравнения в вариациях для порождающего решения. Они легко интегрируются

$$G_1 = G_{1,0}, \quad g_1 = \frac{G_{1,0}}{A}t + g_{1,0}, \quad L_1 = A_1\sin\omega t + B_1\cos\omega t$$

$$l_1 = A_2\sin\omega t + B_2\cos\omega t, \quad \omega^2 = \frac{(A-B)(A-C)}{BC}\left(\frac{G_0}{A}\right)^2 > 0$$

$$B_1 = L_{1,0}, \quad B_2 = l_{1,0}, \quad A_1 = \frac{B-A}{AB}\frac{G_0^2}{\omega}l_{1,0}, \quad A_2 = \frac{A-C}{AC}\frac{L_{1,0}}{\omega}$$

Заметим, что

$$\frac{A_1A_2}{l_{1,0}L_{1,0}} = \frac{(B-A)(A-C)}{A^2BC}\left(\frac{G_0}{\omega}\right)^2 = -1$$

Матрица монодромии уравнений (1.3)

$$X(T) = \begin{Vmatrix} \cos(\omega T) & 0 & \dfrac{A_1}{l_{1,0}}\sin(\omega T) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{A_2}{L_{1,0}}\sin(\omega T) & 0 & \cos(\omega T) & 0 \\ 0 & \dfrac{2\pi}{G_0} & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Согласно модификации метода малого параметра Пуанкаре, предложенной в [2], надо образовать матрицу $Y(T) = X(T) - E$ и убедиться в том, что ранг этой матрицы равен трем. Можно показать, что это условие выполнено, следовательно, у системы с гамильтонианом (1.1) существуют периодические решения, аналитически зависящие от μ, период которых мало отличается от T.

Вычеркивая из матрицы $Y(T)$ последний столбец и вторую строку, получим матрицу, определитель которой равен

$$4\pi G_0^{-1}[\cos(\omega T) - 1]$$

Для того чтобы этот определитель был отличен от нуля, нужно потребовать выполнения условия $\omega T \neq 2\pi k$ (k — целое число) или, что то же самое

$$[(A - B)(A - C) / (BC)]^{1/2} \neq k$$

Покажем, что это неравенство справедливо всегда. Действительно, в противном случае

$$A = B + C + (k^2 - 1)BC / A$$

При $k \neq 0$ последнее соотношение противоречит неравенству треугольника $A < B + C$, а при $k = 0$ легко вытекает из условия $A > B > C$. Таким образом, ранг матрицы Y действительно равен трем.

Установим, что найденные периодические решения возмущенной задачи аналитически зависят от постоянной энергии. Для этого составим следующую матрицу пятого порядка

$$Z = \begin{Vmatrix} Y, & \varphi \\ \psi, & 0 \end{Vmatrix}$$

где φ — вектор-столбец правой части невозмущенной системы уравнений, а ψ — строка $(\partial F_0 / \partial L, \partial F_0 / \partial G, \partial F_0 / \partial l, \partial F_0 / \partial g)$, в которые подставлено решение (1.2) при $t = T$. Можно показать, что ранг матрицы Z равен четырем, поэтому [2] найденные решения аналитически зависят от постоянной интеграла энергии.

Действительно, вычеркивая из Z последний столбец и вторую строку, получим матрицу, определитель которой равен

$$-(G_0 / A)^2 [\cos(\omega T) - 1]$$

Как было показано выше, эта величина никогда в нуль не обращается.

Для равномерных вращений вокруг большей и средней осей инерции теорема доказывается точно так же (с тем лишь отличием, что в случае средней оси решение уравнений (1.3) выражается не в тригонометрических, а в гиперболических функциях времени).

Случай динамической симметрии. Теорема 2. Если $A = B \neq C$, то два периодических решения невозмущенной приведенной задачи — невертикальные постоянные вращения вокруг оси симметрии в противоположных направлениях — не исчезают при добавлении возмущения, а переходят при малых μ в периодические решения возмущенной задачи, аналитически зависящие от параметра μ и постоянной интеграла энергии.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

Замечания. 1°. Случай $A = B = C$ не рассматривается, ибо он относится к числу интегрируемых.

2°. В рассматриваемой задаче известен ряд частных случаев интегрируемости [3]. В основном, это периодические решения, выраженные в конечном виде через известные функции. Некоторые из них (например, решения Бобылева — Стеклова) при малых значениях параметра μ представляют собой частные случаи периодических решений, существование которых доказывается теоремами 1 и 2.

2. Рождение изолированных периодических решений из семейств периодических решений задачи Эйлера — Пуансо. Доказательство теорем 1 и 2 не опиралось на конкретный вид возмущающей функции, а использовало лишь ее инвариантность относительно вертикальных вращений и аналитичность. Укажем множество новых периодических решений, существование которых тесно связано со свойствами всей функции Гамильтона рассматриваемой задачи.

Случай несимметричного твердого тела. Будем считать, что $A > B > C$. В приведенной задаче Эйлера — Пуансо обычным способом введем переменные действие — угол (см. [4])

$$I_2 = G, \quad I_1(F_0, I_2) = \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{\frac{2F_0 - I_2^2 f(x)}{C^{-1} - f(x)}}\, dx \tag{2.1}$$
$$f(x) = A^{-1}\sin^2 x + B^{-1}\cos^2 x$$

Канонические координаты, сопряженные с I_1 и I_2, обозначим через φ_1 и φ_2. В действительном движении переменные L и G связаны неравенствами $G \geqslant 0$, $|L| \leqslant G$, поэтому область возможных значений I_1 и I_2 есть $\Delta = \{I_1, I_2\colon\ I_2 \geqslant 0,\ |I_1| \leqslant I_2\}$. В канонических переменных действие — угол функция Гамильтона F_0 зависит только от I_1 и I_2: $F_0 = F_0(I_1, I_2)$.

Используя формулу (2.1), легко получить, что линии уровня функции $2F_0(I_1, I_2) / I_2^2$ в координатах «действие» суть прямые линии, проходящие через начало координат. Заметим, что прямые $I_1 = 0$, $|I_1| = I_2$ (лежащие в Δ) отвечают равномерным вращениям твердого тела соответственно вокруг большей и меньшей осей инерции. Вращениям вокруг средней оси соответствуют точки из Δ, расположенные на двух прямых $2F_0 / I_2^2 = 1 / B$.

С помощью формулы (2.1) доказываются следующие утверждения.

Лемма 1. Функция $F_0(I_1, I_2)$ непрерывна в Δ и аналитична в области

$$\Delta_A = \Delta \setminus (\{I_1 = 0\} \cup \{2F_0 / I_2^2 = 1/B\} \cup \{|I_1| = I_2\})$$

Лемма 2. Гессиан $|\partial^2 F_0 / \partial I_i \partial I_j|$ $(i, j = 1,2)$ сохраняет знак в каждой из четырех связных подобластей области Δ_A (ср. с [5]).

Рассмотрим геометрическое представление Пуансо. Когда на эллипсоиде инерции точки касания (полюс) сделает один полный оборот, тело повернется вокруг оси постоянного момента на некоторый угол $\alpha = \alpha\,(2F_0 / I_2^2;\ A, B, C)$. Положим $\omega_i = \partial F_0 / \partial I_i$, $\omega_i = \omega_i(I_1, I_2)$, $(i = 1,2)$ (частоты задачи Эйлера — Пуансо).

Лемма 3. (См. [4], § 86)

$$\omega_2 / \omega_1 = (2\pi)^{-1}\alpha\,(2F_0 / I_2^2;\ A, B, C)$$

Лемма 4. Функция $\alpha\,(x;\ A, B, C)$ — аналитическая на $(1 / A, 1 / C) \setminus \{1 / B\}$, причем $\alpha \to \infty$ тогда и только тогда, когда $x \to 1 / B$ (ср. с [5]).

Интеграл площадей будет удобно обозначить через I_3. Разложение возмущающей функции $F_1(I_1 I_2 I_3 \varphi_1 \varphi_2)$ в двойной ряд Фурье по переменным φ_1 и φ_2 имеет следующий вид ([6], § 86):

$$F_1 = \sum B_{m,1} e^{i(m\varphi_1 + \varphi_2)} + \sum B_{m,-1} e^{i(m\varphi_1 - \varphi_2)} + \sum B_{m,0} e^{im\varphi_2} \tag{2.2}$$

Здесь $B_{m,1}$, $B_{m,-1}$, $B_{m,0}$ — функции от I_1, I_2, I_3, аналитические при фиксированном I_3 в области Δ_A. Обозначим через x_0, y_0, z_0 координаты центра тяжести тела в главных осях инерции.

Теорема 3. Пусть $I_2 \neq 0$, $I_2 \neq |I_3|$. Рассмотрим множество инвариантных торов приведенной задачи Эйлера — Пуансо с числами вращения

$$(2\pi)^{-1}\alpha\,(2F_0 / I_2^2;\ A,\ B,\ C) = k$$

(k — целое число). Если $z_0 = 0$, то k нечетно, если $x_0^2 + y_0^2 = 0$, то k четно, если, наконец, $z_0 \neq 0$ и $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$, то k — любое целое число.

Для любого несимметричного тела существует $N\,(A,\ B,\ C)$, такое, что при $k > N$ из семейства периодических решений, лежащих на каждом из этих торов, рождаются при возмущении, по крайней мере, два изолированных периодических решения, существующих при достаточно малых μ и аналитически зависящих от этого параметра. При этом одно из них устойчиво по первому приближению, а другое неустойчиво.

Используя лемму 4, получим, что существует бесконечно много инвариантных торов задачи Эйлера — Пуансо с рациональными числами вращения, на которых рождаются, по крайней мере, два изолированных периодических решения возмущенной задачи.

Доказательство. Пусть для $I = (I_1,\ I_2) = I^\circ \in \Delta_A$ частоты невозмущенной задачи Эйлера — Пуансо ω_1, ω_2 соизмеримы. Тогда функция $F_1(I^\circ,\ \omega_1 t,\ \omega_2 t + \lambda)$ периодична по t. Обозначим через $\bar{F}_1(I^\circ,\ \lambda)$ ее временное среднее. Для того чтобы на торе $I = I^\circ$ рождались пары изолированных периодических решений, достаточно проверить выполнение следующих условий ([6], § 42, 79): 1) гессиан $|\partial^2 F_0 / \partial I^2| \neq 0$ для $I = I^\circ$, 2) $\partial^2 \bar{F}_1 / \partial\lambda^2 \neq 0$, когда $\partial \bar{F}_1 / \partial\lambda = 0$ $(I = I^\circ)$, 3) квадратичная форма

$$\omega_1^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_2^2} - 2\omega_1\omega_2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_1 \partial I_2} + \omega_2^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_1^2} \neq 0$$

когда $I = I^\circ$.

Условие 1) выполнено во всей области Δ_A (лемма 2). Условие 3) означает геометрически, что линия уровня функции $F_0(I_1,\ I_2)$ не имеет перегиба в точке $(I_1,\ I_2) = I^\circ$. Используя формулу (2.1), можно доказать, что это условие выполнено всюду в Δ_A.

Более точно разложение (2.2) можно записать так (см. [4]):

$$F_1 = (\sin\delta\sin\varphi_2,\quad \sin\delta\cos\varphi_2,\quad \cos\delta)\,(s_{ij}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

$$\cos\delta = \frac{I_3}{I_2},\quad \alpha = \frac{x_0}{r},\quad \beta = \frac{y_0}{r},\quad \gamma = \frac{z_0}{r},\quad r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

Здесь элементы квадратной матрицы (s_{ij}) третьего порядка не зависят от φ_2; разложения s_{ij} в ряды Фурье по φ_1 выписаны в [4].

Ограничимся случаем, когда $x_0^2 + y_0^2 = 0$, а $z_0 \neq 0$ (другие случаи, указанные в теореме, рассматриваются аналогично). Тогда F_1, согласно (2.3) и [4], запишется следующим образом:

$$F_1 = \gamma (s_{13} \sin\delta \sin\varphi_2 + s_{23} \sin\delta \cos\varphi_2 + s_{33}\cos\delta) =$$

$$= \gamma \frac{2\pi}{\mathbf{K}} \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}} \left\{ \sin\delta \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-q^n(1-q^{2n})\operatorname{ch}\sigma \sin 2n\varphi_1 \sin\varphi_2}{1-2q^{2n}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4n}} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{q^n(1+q^{2n})\operatorname{sh}\sigma\cos 2n\varphi_1\cos\varphi_2}{1-2q^{2n}\operatorname{ch}2\sigma+q^{4n}} - \frac{1}{4\operatorname{sh}\sigma}\right] +$$

$$\left. + \cos\delta\left(\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos 2n\varphi_1\right)\right\}$$

$$\varkappa^2 = \frac{C(A-B)}{A(B-C)}, \quad \Lambda^2 = \varkappa^2 \frac{2CF_0 - I_2^2}{I_2^2 - 2AF_0}, \quad q = \exp\left(\frac{-\pi \mathbf{K}'}{\mathbf{K}}\right)$$

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K}(\sqrt{1-\Lambda^2}), \quad \sigma = \frac{\pi}{2\mathbf{K}} F\left(\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{\Lambda}, \sqrt{1-\Lambda^2}\right)$$

Здесь $\mathbf{K}(\Lambda)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем Λ, F — эллиптический интеграл первого рода.

Положим $\varphi_1 = \omega_1 t$, $\varphi_2 = \omega_2 t + \lambda$, $\omega_2 / \omega_1 = 2n$ (n — натуральное число). Тогда

$$\bar{F}_1 = \gamma \frac{2\pi}{\mathbf{K}} \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\Lambda^2}} \sin\delta \frac{q^n[(1+q^{2n})\operatorname{sh}\sigma - (1-q^{2n})\operatorname{ch}\sigma]}{1-2q^{2n}\operatorname{ch}2\sigma + q^{4n}} \frac{\cos\lambda}{2}$$

Так как $\sin\delta \neq 0$ (в противном случае $|I_3| = I_2$), то условие 2) теоремы Пуанкаре нарушается только в том случае, если

$$(1-q^{2n})\operatorname{ch}\sigma - (1+q^{2n})\operatorname{sh}\sigma = 0 \tag{2.4}$$

Когда $n \to \infty$, то, согласно леммам 3 и 4, функция $2F_0 / I_2^2$ стремится к $1 / B$; при этом, очевидно, $\Lambda \to C / A\ (< 1)$. Так как Λ — непрерывная функция от $2F_0 / I_2^2$ в некоторой окрестности точки $1 / B$, то существует номер $N_1(A, B, C)$, такой, что при $\omega_2 / \omega_1 = 2n > N_1$ справедливы неравенства

$$0 < \Lambda_1 < \Lambda < \Lambda_2 < 1, \ \Lambda_i = \text{const}, \quad i = 1,2$$

При этом, очевидно, $|\sigma| < \sigma_0$ и $|q| < q_0 < 1$ (числа Λ_1, Λ_2, σ_0 и q_0 в конечном счете зависят только от A, B, C). Следовательно, существует номер $N(A, B, C)$ $(N > N_1)$, такой, что при $\omega_2 / \omega_1 = 2n > N$ равенство (2.4) не может выполняться.

Случай динамической симметрии. Можно показать, что в переменных Депри функция Гамильтона (1.1) в случае $A = B$ имеет вид

$$F = \frac{1}{2A}G^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)L^2 + P\left[x_0\left(\frac{H}{G}\sqrt{1-\left(\frac{L}{G}\right)^2}\sin l + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{L}{G}\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\sin l\cos g + \sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\cos l \sin g\right) +$$

$$\left. + z_0\left(\frac{LH}{G^2} - \sqrt{1-\left(\frac{L}{G}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{H}{G}\right)^2}\cos g\right)\right]$$

где $(x_0, 0, z_0)$ — координаты центра тяжести в главных осях инерции, P — вес тела. Отметим, что эти переменные являются переменными действие — угол интегрируемой задачи Эйлера — Пуансо в симметричном случае.

Теорема 4. Пусть $x_0 \neq 0$ и $A = B > 2C$. Тогда на двумерных инвариантных торах

$$\frac{G}{A} = \pm\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)L, \quad G \neq 0, \quad G \neq |H|$$

приведенной задачи Эйлера — Пуансо рождаются пары изолированных периодических решений возмущенной системы при малых μ. Они аналитически зависят от μ, и одно из решений каждой пары устойчиво в первом приближении, а другое неустойчиво.

Это утверждение доказывается так же, как теорема 3.

Замечание. С помощью конструкции, предложенной в [7], можно доказать, что при добавлении возмущения исчезают не все периодические решения, лежащие на любом инвариантном торе задачи Эйлера — Пуансо с рациональным числом вращения, а при малых μ остаются, по крайней мере, два. Неизвестно, правда, будут ли они изолированными и аналитически зависеть от μ.

3. Несуществование дополнительного аналитического интеграла уравнений движения несимметричного твердого тела. Рождение большого числа невырожденных периодических решений уравнений движения несимметричного тела несовместимо с интегрируемостью этой задачи. С помощью теоремы 3 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 5. Канонические уравнения движения несимметричного тяжелого твердого тела с функцией Гамильтона (1.1) не имеют третьего аналитического и аналитически зависящего от параметра μ интеграла, независимого от классических, и находящегося в инволюции с интегралом площадей.

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть такой интеграл существует. Тогда в силу предположения об инволюции существует дополнительный независимый интеграл приведенной канонической системы уравнений; обозначим его $\Phi = \Phi_0 + \mu\,\Phi_1 + \ldots$.

Можно показать, что функции F_0 и Φ_0 зависимы во всех точках двумерных инвариантных торов задачи Эйлера — Пуансо, о которых идет речь в теореме 3 (эти торы будем называть резонансными).

Действительно, периодические решения $\Gamma(\mu)$, рождающиеся из состава периодических решений, расположенных на произвольном резонансном торе T_0^2 задачи Эйлера — Пуансо, не вырождены, поэтому, как доказано в [6], функции F и Φ зависимы во всех точках $\Gamma(\mu)$. Устремим μ к нулю. Периодическое решение $\Gamma(\mu)$ перейдет в периодическое решение $\Gamma(0)$ невозмущенной задачи, лежащее на T_0^2, а функции F и Φ перейдут соответственно в F_0 и Φ_0. По непрерывности функции F_0 и Φ_0 будут зависимы во всех точках траектории периодического решения $\Gamma(0)$. В некоторой окрестности тора T_0^2, на котором лежит $\Gamma(0)$, введем переменные действие — угол задачи Эйлера — Пуансо: $(I_1 I_2 \varphi_1 \varphi_2)$. Тогда F_0 и Φ_0 будут зависеть только от I_1 и I_2 (последняя — в силу невырожденности приведенной задачи Эйлера — Пуансо). Так как функции F_0 и Φ_0 зависимы на $\Gamma(0)$, то матрица Якоби $\partial(F_0, \Phi_0) / \partial(I, \varphi)$ имеет ранг единицу, когда $(I, \varphi) \in \Gamma(0)$. В частности, в этих точках $\partial(F_0, \Phi_0)/\partial(I_1, I_2) = 0$. Однако исходная матрица Якоби не зависит от φ; значит ее ранг равен единице во всех точках тора T_0^2, и, следовательно, функции F_0 и Φ_0 на нем зависимы. Доказано, таким образом, что функции F_0 и Φ_0 зависимы на множестве всех резонансных торов приведенной задачи Эйлера — Пуансо.

Нетрудно показать, что множество всех резонансных торов обладает следующим ключевым свойством: если аналитическая функция f обращается на нем в нуль, то $f \equiv 0$ во всем фазовом пространстве.

Принимая во внимание аналитичность функций F_0 и Φ_0, получим, что они зависимы во всем фазовом пространстве, т. е. просто функционально зависимы. В то же время можно показать, что если существует дополнительный независимый интеграл Φ, то существует такой аналитический интеграл Φ', что функции F_0 и Φ_0' независимы (см. [6], § 81). Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Замечание. Основная идея проделанных рассуждений содержится в первом доказательстве Пуанкаре общей теоремы о неинтегрируемости канонических уравнений, близких к интегрируемым ([8], § 22). Но, как было замечено самим Пуанкаре, его общая теорема неприменима к рассматриваемой задаче ([6], § 86). Успех приведенного выше доказательства состоит в использовании ключевого свойства множества резонансных торов невозмущенной задачи.

Автор благодарит В. И. Арнольда и Ю. А. Архангельского за внимание и советы.

Поступила 26 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Депри А.* Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости. Механика. Сб. перев., 1968, № 2.
2. *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
3. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. М., Гостехиздат, 1953.
4. *Садов Ю. А.* Переменные действие — угол в задаче Эйлера — Пуансо. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
5. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, № 5.
6. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избранные труды, т. 1. М., «Наука», 1971.
7. *Arnold V. I., Avez A.* Problemes ergodiques de la mécanique classique. Paris, Guathier — Villars, 1967.
8. *Пуанкаре А.* О проблеме трех тел и об уравнениях динамики. Избранные труды, т. 2. М., «Наука», 1972.