Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА,
МЕХАНИКА

1

Отдельный оттиск

1 9 7 5

Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1975

УДК 531.38

В. В. КОЗЛОВ

НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

§ 1. Свойства гамильтониана. Функция Гамильтона в задаче о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой имеет вид

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mu \mathscr{H}_1, \tag{1}$$

где $\mathscr{H}_0$ — живая сила, $\mu\mathscr{H}_1$ — потенциальная энергия системы (выделенный постоянный множитель μ — это произведение веса тела на расстояние от центра тяжести до точки закрепления).

Когда $\mu=0$, будем иметь случай Эйлера—Пуансо. В этой интегрируемой задаче можно перейти к переменным действие — угол (I_i, φ_i), $i=1, 2, 3$ (см. [1]). В новых канонических переменных функция $\mathscr{H}_0$ зависит лишь от I_1 и I_2, а возмущение $\mathscr{H}_1$ не содержит φ_3 и является периодической функцией периода 2π по угловым переменным φ_1 и φ_2.

Рассматриваемая задача сводится к двум степеням свободы с гамильтонианом (1), в котором действие I_3 (интеграл площадей) считается фиксированной постоянной.

Вид разложения возмущающей функции $\mathscr{H}_1$ в двойной ряд Фурье был известен еще А. Пуанкаре [2, п. 86]:

$$\mathscr{H}_1 = \Sigma B_{m,1} e^{i(m\varphi_1+\varphi_2)} + \Sigma B_{m,-1} e^{i(m\varphi_1-\varphi_2)} + \Sigma B_{m,0} e^{im\varphi_1}. \tag{2}$$

Коэффициенты этого разложения легко вычислить, использовав результаты работы [3].

Функция Гамильтона задачи Эйлера—Пуансо определена в области $\Delta = \{I_1, I_2 : |I_1| \leqslant |I_2|\}$ (подробности см. в [1]).

Определение 1. Вековым множеством $\mathfrak{B}$ системы с гамильтонианом (1) называется множество всех пар $(I_1, I_2) \in \Delta$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $m\omega_1 \pm \omega_2 = 0$, где $\omega_i = \dfrac{\partial \mathscr{H}_0}{\partial I_i}$ $\quad (i = 1, 2)$, $m \in Z$;

2) $B_{m,\pm 1}(I_1, I_2) \neq 0$.

Из результатов заметки [1] следует, что множество точек, удовлетворяющих условию 1 при фиксированных m и выборе знака перед частотой ω_2, суть две прямые линии, проходящие через начало координат $\{I_1=I_2=0\}$. Из явного вида коэффициентов разложения (2) вытекает, что для несимметричного тела бесконечно много прямых $m\omega_1 \pm \omega_2=0$ удовлетворяют условию 2. Использовав теорему 1 заметки [1], легко найти множество предельных точек для $\mathfrak{B}$. Это две прямые линии $2\mathcal{H}_0(I_1, I_2) = \frac{1}{B} I_2^2$ (B — средний момент инерции), которые пересекаются в начале координат.

Предположим, что система (1) имеет, кроме интегралов энергии и площадей, дополнительный интеграл $\mathcal{F}(I, \varphi, \mu)$, однозначный и аналитический в канонических переменных действие — угол невозмущенной задачи и аналитический по малому параметру μ. Будем считать, что функции I_3 и $\mathcal{F}$ находятся в инволюции (только тогда существует первый интеграл уравнений Эйлера — Пуассона), то есть $\mathcal{F}$ не содержит угловой переменной φ_3. Пусть

$$\mathcal{F}(I, \varphi, \mu) = \mathcal{F}_0(I) + \mu \mathcal{F}_1(I, \varphi) + \ldots$$

Так как задача Эйлера — Пуансо невырождена (см. [1]), функция $\mathcal{F}_0$ не зависит от φ_1, φ_2, φ_3. Точно так же, как в [2, п. 82], доказывается, что функции $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{F}_0$ зависимы на множестве $\mathfrak{B}\subset\Delta$. Вековое множество $\mathfrak{B}$ не является всюду плотным в Δ. Это обстоятельство не позволило А. Пуанкаре на основании доказанных им общих теорем заключить, что рассматриваемая задача не имеет однозначных аналитических интегралов, отличных от классических [2, п. 86].

Такая трудность преодолевалась бы сравнительно просто, если бы функция $\mathcal{H}_0$ была аналитической в Δ. Действительно, якобиан $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{F}_0$ равен нулю на множестве $\mathfrak{B}$ и является аналитической функцией в Δ. Следовательно, на прямой $I_2 = I_2^0$ якобиан аналитичен и его нули имеют предельную точку

$$\left\{I_1^0, I_2^0 : 2\mathcal{H}_0(I_1^0, I_2^0) = \frac{1}{B}(I_2^0)^2\right\}.$$

Поэтому он равен нулю на любой прямой $I_2=I_2^0$ и, следовательно, есть тождественный нуль во всей области Δ, так что функции $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{F}_0$ зависимы. Однако при помощи метода А. Пуанкаре [2, п. 81] можно доказать, что если существует некоторый независимый интеграл $\mathcal{F}(I, \varphi, \mu)$, то существует и другой, для которого $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{F}_0$ не являются зависимыми.

К сожалению, гамильтониан задачи Эйлера—Пуансо $\mathcal{H}_0$ не аналитичен в Δ, так как прямые $2\mathcal{H}_0(I_1, I_2) = \frac{1}{B} I_2^2$ являются для него купюрами [1]. Поэтому доказательства отсутствия аналитических интегралов усложняются в техническом отношении.

§ 2. Несуществование дополнительного интеграла, аналитического в канонических переменных А. Деприи. Эти переменные введены в [4]. Переход от естественных канонических координат ($\vartheta \varphi \psi\ p_\vartheta\ p_\varphi\ p_\psi$) к переменным Депри, которые мы обозначим ($l \varphi_2 \varphi_3 L I_2 I_3$) есть аналитическое каноническое преобразование.

Итак, рассматривается система с двумя степенями свободы, гамильтониан которой

$$\mathcal{H}_0(l\, \widehat{\varphi}_2\, \widehat{\varphi}_3\, L\, I_2\, \widehat{I}_3) + \mu\, \mathcal{H}_1(l\, \varphi_2\, \widehat{\varphi}_3\, L\, I_2\, I_3) \tag{3}$$

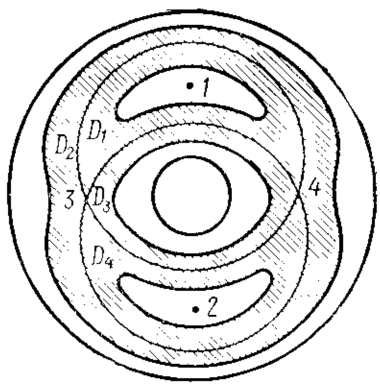
зависит от параметра I_3 (постоянная площадей). Функция Гамильтона невозмущенной задачи (когда $\mu=0$) имеет вид (см. [4]):

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right)(I_2^2 - L^2) + \frac{1}{2C}L^2.$$

Будем считать, что $A>B>C$.

Рассмотрим кольцо $K=\{l,\ L\colon 0 \leqslant l < 2\pi,\ |L| \leqslant |I_2|\}$, секущее трехмерный уровень интеграла модуля момента ($I_2=\mathrm{const}$) задачи Эйлера — Пуансо. Траектории невозмущенной системы трансверсальны к кольцу K всюду, кроме границ, которые представляют собой периодические решения — постоянные вращения вокруг большей оси инерции в противоположных направлениях. Любая точка $p \in K$ через некоторое время опять вернется на K. Таким образом, получаем отображение S внутренности кольца K на себя. Можно показать, что S сохраняет меру $\nu(D) = \iint\limits_D dL\,dl$ и по непрерывности вращает границы K в противоположных направлениях.

Задача Эйлера—Пуансо интегрируема; поэтому кольцо расслаивается на замкнутые инвариантные кривые отображения S (они показаны на рисунке). Неподвижные точки *1* и *2* соответствуют периодическим решениям — вращениям вокруг меньшей оси инерции в противоположных направлениях. Точки *3* и *4* тоже являются неподвижными точками отображения S. Это постоянные вращения вокруг средней оси инерции гиперболического типа; их сепаратрисы идут из седла в седло. Обозначим через D область на кольце K, состоящую из четырех связных подобластей D_i ($i=1, 2, 3, 4$) (на рисунке она заштрихована).



Определение 2. Инвариантный двумерный тор задачи Эйлера — Пуансо называется резонансным, если он определяется переменными действия $(I_1, I_2) \in \mathfrak{B}$.

Объединение всех резонансных торов обозначим $\mathfrak{B}'$. Множество $\mathfrak{B}'$ пересекается с кольцом K по инвариантным кривым отображения S, которые также будем называть резонансными.

Обозначим через $A(\mathfrak{M})$ класс функций, аналитических в области $\mathfrak{M} \subset R^n$.

Определение 3. Множество $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ называется ключевым для класса $A(\mathfrak{M})$, если для любой функции f из $A(\mathfrak{M})$, равной нулю на $\mathfrak{N}$, справедливо равенство $f \equiv 0$ в области $\mathfrak{M}$.

Лемма. *Множество $\mathfrak{B}' \cap D$ является ключевым для класса $A(D)$.*

Иными словами, объединение резонансных кривых отображения S, лежащих в области D, есть ключевое множество для $A(D)$.

Теорема 1. В области $D \times (I_2', I_2'') \times T^1(\varphi_2 \bmod 2\pi) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ нет однозначного аналитического интеграла канонических уравнений с гамильтонианом (3), независимого от интеграла энергии $\mathscr{H}$ и аналитического по параметру $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Доказательство. Если $(L, l) \in D_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$, то

1) $D_i \times (I_2', I_2'') \times T^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon) = \widetilde{D} \times T^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$;

2) в области $\widetilde{D} \times T^2$ можно ввести глобальные переменные действие — угол невозмущенной задачи (см. [1]).

Пусть теперь существует интеграл канонических уравнений (3):

$$\mathcal{F}(l\varphi_2 LI_2, \mu) = \mathcal{F}_0(lLI_2) + \mu\mathcal{F}_1, (l\varphi_2 LI_2) + \dots$$

Докажем, что функции $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{F}_0$ зависимы на множестве $D \times (I_2', I_2'')$. Действительно, фиксируя $I_2 \in (I_2', I_2'')$, введем в областях D_i переменные действие — угол (I_1, φ_1). Тогда $I_1 = I_1(L, l, I_2)$ и $\varphi_1 = \varphi_1(L, l, I_2)$.

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial l} & \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L} & \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_2} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial l} & \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial L} & \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial I_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_1} & \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_2} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial I_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial I_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial l} & \frac{\partial I_1}{\partial L} & \frac{\partial I_1}{\partial I_2} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial l} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial L} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial I_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Обозначим матрицу размером 2×3 в правой части равенства (4) через $\widetilde{R}$. Заметим, что $\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \varphi_1} = 0$. Пусть $(I_1, I_2) \in \mathfrak{B}$. Тогда ранг матрицы $\widetilde{R}$ равен 1. Значит, на резонансных инвариантных кривых кольца K матрица R тоже ранга 1. Множество этих инвариантных кривых отображения S является ключевым для класса $A(D)$ (лемма). Поэтому в области $D \times (I_2', I_2'')$ ранг матрицы R равен 1, то есть функции $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{F}_0$ зависимы.

Производная $\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial l} = 0$ только при $l = \frac{k\pi}{2}$ $(k \in Z)$ или $I_2 = L$. Последнее условие в области D никогда не выполняется. Пусть

$$l \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in Z).$$

Тогда равенство $\mathcal{H}_0(l, L, I_2) = \mathcal{H}_0$ можно разрешить относительно l и найденное выражение подставить в $\mathcal{F}_0$. Получим $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0(l(\mathcal{H}_0, L, I_2), L, I_2)$, причем $\mathcal{F}_0$ не зависит от L и I_2. Действительно,

$$\frac{d\mathcal{F}_0}{dL} = \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial L} + \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial L} = 0$$

$\left(\text{так как } \frac{\partial l}{\partial L} = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L} \Big/ \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial l}\right)$; аналогично и $\frac{d\mathcal{F}_0}{dI_2} = 0$. Таким образом, $\mathcal{F}_0 = \Psi(\mathcal{H}_0)$, где $\Psi(x)$ — функция, аналитическая на некотором интервале (h', h''), $0 < h' < h''$. При малых μ выражение $\frac{\mathcal{F} - \mathcal{F}_0(\mathcal{H})}{\mu}$ — первый интеграл канонических уравнений с функцией Гамильтона (4). Обозначим его $\Phi = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \dots$ Снова докажем, что Φ_0 является функцией от $\mathcal{H}_0$. Этот процесс можно продолжить сколь угодно далеко и прийти к заключению, что функции $\mathcal{H}$ и $\mathcal{F}$ зависимы.

З а м е ч а н и е 1. Нетрудно доказать, что система с функцией Гамильтона (4) не допускает даже частных аналитических интегралов, аналитически зависящих от μ, при ограничениях на постоянную энергии.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 1 утверждает, что канонические уравнения задачи о вращении тяжелого несимметричного твердого тела с неподвижной точкой не допускают, кроме интегралов энергии и площадей, третьего аналитического интеграла, находящегося в инволюции с интегралом площадей. Последнее условие можно отбросить, но это потребует более громоздкого доказательства.

§ 3. Несуществование дополнительного интеграла, аналитического в переменных Эйлера—Пуассона. Уравнения Эйлера—Пуассона определены в $R^6=R^3(p, q, r)\times R^3(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$. Пусть D^3 — некоторая окрестность нуля в $R^3(p, q, r)$, а B^3 — окрестность нуля в $R^3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, содержащая сферу Пуассона:

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1.$$

Т е о р е м а 2. В области $D^3\times B^3\subset R^6$ не существует четвертого аналитического интеграла уравнений Эйлера—Пуассона, который не зависит от интегралов энергии, площадей и геометрического.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует новый интеграл $\mathcal{F}(pqr\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$, однозначный и аналитический в $D^3\times B^3$. Введем в уравнения Эйлера—Пуассона малый параметр μ, меняя γ_i на $\mu\gamma_i$. Тогда $\mathcal{F}(pqr, \mu\gamma_1, \mu\gamma_2, \mu\gamma_3)$ можно представить в виде степенного ряда по μ. Этот ряд будет сходиться для достаточно малых значений μ, если $(pqr)\in D$ (D — ограниченная окрестность нуля в $R^3(pqr)$), а γ_i принимают значения из сферы Пуассона. Выразив переменные Эйлера—Пуассона через переменные Депри ($l\varphi_2$, LI_2I_3), получим при фиксированном значении I_3 новый интеграл канонических уравнений с функцией Гамильтона (3), который не зависит от интеграла энергии и является аналитическим по параметру μ. Но это противоречит заключению теоремы 1.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 2 является существенным усилением теоремы Пуанкаре—Гюссона об отсутствии у рассматриваемой задачи дополнительного алгебраического интеграла [5].

З а м е ч а н и е 2. Теорема 2 легко распространяется на случай движения твердого тела в линейном поле Ф. де Бруна, что является усилением известного результата Ю. А. Архангельского [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. К о з л о в В. В. *Геометрия переменных «действие — угол» в задаче Эйлера—Пуансо.* «Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ.», № 5, 74—79, 1974.
2. П у а н к а р е А. Новые методы в небесной механике. Избранные труды, т. I. М., «Наука», 1971.
3. С а д о в Ю. А. Переменные «действие — угол» в задаче Эйлера—Пуансо. «Прикл. матем. и механ.», **34**, вып. 5, 962—964, 1970.
4. Д е п р и А. Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости. Сб. «Механика», вып. 2, 3—9, 1968.
5. H u s s o n Ed. Sur un theoreme de H. Poincare, relativement du mouvement d'un solide pesant. «Acta math.», **31**, 71—88, 1908.
6. А р х а н г е л ь с к и й Ю. А. Об одной теореме Пуанкаре, относящейся к задаче о движении твердого тела в ньютоновском поле сил. «Прикл. матем. и механ.», **26**, вып. 6, 1116—1117, 1962.

Поступила в редакцию
23.2 1973 г.

К а ф е д р а
теоретической механики

V. V. Kozlov

NON-EXISTENCE OF AN ADDITIONAL ANALYTIC INTEGRAL IN THE PROBLEM OF THE MOTION OF AN UNSYMMETRICAL HEAVY SOLID ABOUT A FIXED POINT

If the ellipsoid of inertia is not an ellipsoid of revolution, the equations of motion of a solid are not integrable by Liouville quadratures. This result considerably strengthens the Poincaré—Husson theorem concerning the absence of an algebraic integral.