АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Том 39

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1

МОСКВА · 1975

Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.31

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ НА ИНВАРИАНТНЫХ ТОРАХ ЗАДАЧИ КОВАЛЕВСКОЙ

В. В. Козлов

(Москва)

Определяются числа вращения динамических систем, возникающих на двумерных инвариантных торах в задаче Ковалевской. Показано, что они равны отношению периодов гиперэллиптического интеграла, содержащего многочлен Ковалевской. С помощью общей теоремы о приведении уравнений на n-мерном торе, доказанной в работе, дифференциальные уравнения на указанных двумерных инвариантных торах обратимой заменой переменных приводятся к виду $\varphi_i^{\cdot} = \omega_i$, где $\omega_i = \text{const}$; $i = 1, 2$. Доказывается также, что в случае быстрых вращений тела совместные уровни четырех первых интегралов задачи состоят из двух торов, причем динамические системы, возникающие на этих торах, изоморфны.

1. Замечания о топологических свойствах совместных уровней первых интегралов. *Уравнения Эйлера — Пуассона задачи о движении тяжелого* твердого тела вокруг неподвижной точки являются аналитической системой дифференциальных уравнений, определенных в R^6 $\{x : pqr\gamma_1\gamma_2\gamma_3\}$. Известно, что у этой системы есть интегральный инвариант, плотность которого $M(x) \equiv 1$ (т. е. фазовый объем инвариантен относительно однопараметрической группы g^t сдвигов по траекториям уравнений Эйлера — Пуассона).

Эти уравнения всегда имеют три первых алгебраических интеграла: интеграл энергии (H), интеграл площадей (L) и геометрический (Γ). Если твердое тело является волчком Ковалевской, то существует четвертый алгебраический интеграл K.

Обозначим через E следующее множество:

$$E = \{x : H = 6h,\ L = 2l,\ \Gamma = 1,\ K = k^2\}\ (E \subset R^6)$$

Оно компактно, так как множество $\{H = 6h, \Gamma = 1\}$ ограничено в R^6 и E замкнуто. Ясно, что E инвариантно относительно группы g^t.

Очевидно, что те значения параметров $6h$, $2l$, k^2, при которых первые интегралы зависимы на E, образуют множество нулевой меры. Всюду ниже рассматриваются только такие множества E, на которых первые интегралы независимы. В этом случае E — гладкое двумерное многообразие.

Обозначим сужение группы g^t на E через $g_E{}^t$. Из теоремы Якоби о последнем множителе (см. [1]) следует существование на E жордановой меры $\nu(x)$, инвариантной относительно $g_E{}^t$. Следовательно, тройка $(E, g_E{}^t, \nu)$ является классической динамической системой (определение см. в [2]).

Задачей данной заметки является изучение таких систем.

Сначала исследуем топологические свойства многообразия E. На E нет особых точек системы дифференциальных уравнений Эйлера — Пуассона. Действительно, особые точки отвечают стационарным вращениям (или относительным равновесиям) тела. Но, как доказано в [3], на этих решениях интегралы энергии и момента зависимы. А такие случаи здесь условились не рассматривать.

Многообразие E ориентируемо. Значит, каждая связная компонента E является двумерным тором (как всякое связное, ориентируемое, компактное двумерное многообразие, допускающее касательное векторное поле без особых точек; см., например, [2]). Нетрудно доказать, что при малых значениях параметра μ — произведение веса тела на расстояние от центра тяжести до точки подвеса — многообразие E состоит из двух связных компонент.

2. Вычисление чисел вращения. Авторы работ, посвященных задаче Ковалевской, использовали уравнения движения в переменных Ковалевской s_1, s_2, где явно присутствуют комплексные величины [1]. Это создает определенные неудобства при исследовании действительных движений системы. Мнимых величин можно избежать, записывая уравнения движения в следующей форме:

$$\frac{ds_1}{\sqrt{-\Phi(s_1)}}+\frac{ds_2}{\sqrt{-\Phi(s_2)}}=0,\qquad \frac{s_1ds_1}{\sqrt{-\Phi(s_1)}}+\frac{s_2ds_2}{\sqrt{-\Phi(s_2)}}=\frac{dt}{2} \tag{2.1}$$

$$\Phi(z)=\{z[(z-3h)^2+\mu^2-k^2]-2\mu^2l^2\}(z-3h-k)(z-3h+k)$$

Докажем, что в действительном движении переменные s_1 и s_2 принимают действительные значения. Для этого выпишем формулы, принадлежащие Ковалевской, которые выражают s_1 и s_2 через переменные Эйлера — Пуассона $(pqr\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$ [1]

$$s_{1,2}=3h+\frac{R(x_1,x_2)\mp\sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} \tag{2.2}$$

$$x_{1,2}=p\pm iq,\quad R(z)=-z^4+6hz^2+4\mu lz+\mu^2-k^2$$

$$R(x_1,x_2)=-x_1^2x_2^2+6hx_1x_2+2\mu l(x_1+x_2)+\mu^2-k^2$$

Очевидно, что $x_2=\bar{x}_1$, $x_1=\bar{x}_2$ (здесь черта означает комплексное сопряжение). Так как $R(x_1,x_2)$ и $(x_1-x_2)^2$ — симметрические многочлены относительно x_1 и x_2 с действительными коэффициентами, то они принимают только действительные значения. Далее, выражение

$$R(x_1)R(x_2)=R(x_1)R(\bar{x}_1)=R(x_1)\overline{R(x_1)}$$

очевидно, неотрицательно. Действительность переменных s_1, s_2 вытекает теперь из формул (2.2).

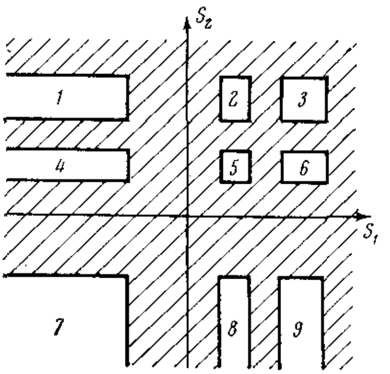
Из формул (2.1) следует, что область действительных движений определяется неравенствами $\Phi(s_1)\leqslant 0$, $\Phi(s_2)\leqslant 0$.

На фигуре изображена область возможных движений для случая, когда многочлен $\Phi(z)$ имеет пять действительных корней (она незаштрихована). Движение не может происходить в областях *3*, *5* и *7*, так как внутри этих областей существуют точки s_1 и s_2 такие, что $s_1 = s_2$. Из (2.2) следует тогда, что $R(x_1) = \overline{R(x_2)} = 0$. Так как $R(z)$ — многочлен четвертой степени, то при фиксированных постоянных первых интегралов уравнение $R(z) = 0$ может иметь не более четырех корней. Поэтому на инвариантных торах существует не более четырех точек, в которых $s_1 = s_2$. Но в областях *3*, *5*, *7* таких точек бесконечно много.

Таким образом, движение может быть только в областях *1*, *2*, *4*, *6*, *8*, *9*. Для того чтобы изучить это движение, перепишем уравнения (2.1) в виде

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{\sqrt{-\Phi(s_1)}}{2(s_1 - s_2)}, \qquad \frac{ds_2}{dt} = \frac{-\sqrt{-\Phi(s_2)}}{2(s_1 - s_2)} \tag{2.3}$$

Пусть начальные условия для s_1, s_2 лежат в одной из указанных шести областей и в начальный момент оба радикала в (2.3) положительны. Предположим, для определенности, что $s_1 > s_2$ (т. е. движение имеет место в областях *6*, *8*, *9*). Тогда в последующие моменты времени s_1 возрастает, а s_2 убывает. Это будет происходить до тех пор, пока s_1 (или s_2) не достигнет корня многочлена $\Phi(z)$ или не уйдет в бесконечность. Заметим, что уход s_1 (или s_2) в бесконечность происходит за конечное время. Это вытекает из сходимости интеграла



$$\int_{-\infty}^{a} \frac{z\,dz}{\sqrt{-\Phi(z)}},$$

где a — наименьший простой корень $\Phi(z)$.

Пусть, например, s_1 достигло корня $\Phi(z)$ или ушло в бесконечность. Тогда радикал в первом уравнении (2.3) меняет знак и в последующие моменты времени s_1 убывает. Это происходит опять до тех пор, пока s_1 (или s_2) не достигнет корня многочлена $\Phi(z)$ или не уйдет в бесконечность. И так далее.

Покажем, что при малых значениях μ действительное движение происходит в «стаканах» *1* и *9*. Пусть сначала $\mu = 0$. Выясним, в какую область попадут начальные условия для s_1 и s_2. При $\mu = 0$ многочлен $\Phi(z)$ не зависит от постоянной площадей $(2l)$ и имеет вид

$$\Phi(z) = z(z - 3h - k)^2 (z - 3h + k)^2$$

Интегралы энергии и интеграл Ковалевской запишутся так:

$$H: p^2 + q^2 + r^2 / 2 = 3h, \qquad K: p^2 + q^2 = k \quad (k > 0)$$

Очевидно, что на любой из двух связных компонент множества $\{H = 3h, K = k^2\}$ в R^3 $\{pqr\}$ существуют точки, p-координата которых равна нулю. Рассмотрим эти начальные условия. Тогда из (2.2) получим, что $s_1 = 0$, $s_2 = 3h + k$.

Заметим, что корень $(3h - k)$ многочлена $\Phi(z)$ лежит справа от нуля, так как $3h - k = r^2 / 2 > 0$. Значит, область действительных движений в этом случае $s_1 \leqslant 0$, $s_2 = 3h + k$.

Пусть теперь $\mu \neq 0$, но очень мало. Тогда s_1 будет изменяться от $-\infty$ до числа, близкого к нулю (так как $z = 0$ — простой корень многочлена $\Phi(z)$ при $\mu = 0$), а s_2 будет заключено между двумя числами, мало отличающимися от $3h + k$. Следовательно, действительное движение при малых значениях параметра μ имеет место в областях *1* и *9*.

Перейдем к вычислению инвариантов динамических систем $(E, g_E{}^t, \nu)$ — чисел вращения касательных векторных полей на E (которые индуцируются уравнениями Эйлера — Пуассона). Для определенности будем рассматривать двумерные инвариантные торы, которые соответствуют областям *1* и *9* на плоскости R^2 $\{s_1, s_2\}$ (или будем считать параметр μ малым). Корни многочлена $\Phi(z)$ обозначим a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; они расположены в возрастающем порядке. Область *1* на фигуре определяется неравенствами

$$-\infty < s_1 \leqslant a_0, \quad a_3 \leqslant s_2 \leqslant a_4$$

В уравнениях (2.3) сделаем замену переменных $s_1 = s_1(x)$, $s_2 = s_2(y)$ по формулам

$$x = \frac{\pi}{\tau_1} \int_{s_1}^{a_0} \frac{ds}{\sqrt{-\Phi(s)}}, \qquad y = \frac{\pi}{\tau_2} \int_{a_3}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{-\Phi(s)}}, \qquad \begin{array}{l} s_1 \in (-\infty, a_0] \\ s_2 \in [a_3, a_4] \end{array} \tag{2.4}$$

$$\tau_1 = \int_{-\infty}^{a_0} \frac{ds}{\sqrt{-\Phi(s)}}, \qquad \tau_2 = \int_{a_3}^{a_4} \frac{ds}{\sqrt{-\Phi(s)}}$$

Тогда $x, y \ (\in [0, 2\pi])$ — угловые переменные на инвариантных торах $T^2(6h, 2l, k^2)$, соответствующих областям вида *1* при замене Ковалевской (2.2). В новых переменных $x, y \bmod 2\pi$ уравнения (2.3) приводятся к виду

$$\dot{x} = \frac{\pi}{2\tau_1} \frac{1}{s_2(y) - s_1(x)}, \qquad \dot{y} = \frac{\pi}{2\tau_2} \frac{1}{s_2(y) - s_1(x)} \tag{2.5}$$

где $s_i(z)$ — действительные гиперэллиптические функции с периодом 2π, определяемые из соотношений (2.4).

Уравнения (2.5) имеют интегральный инвариант с плотностью $F(x, y) = s_1(x) - s_2(y)$; эта функция нигде в нуль не обращается. Из (2.5) следует, что числа вращения динамической системы $(T^2, g_{T^2}^t, \nu)$ равны $\gamma = \tau_2 / \tau_1$.

Значит, числа вращения динамических систем на инвариантных торах задачи Ковалевской равны отношениям периодов гиперэллиптического интеграла

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{-\Phi(z)}}$$

где $\Phi(z)$ — многочлен Ковалевской.

По теореме Лиувилля об интегрируемости [4], дифференциальные уравнения на $T^2(6h, 2l, k^2)$, определяющие динамическую систему $(T^2, g_{T^2}^t, \nu)$, приводятся в некоторых угловых переменных φ_1, φ_2 mod 2π к следующему виду:

$$\varphi_1^{\boldsymbol{\cdot}} = \omega_1, \ \varphi_2^{\boldsymbol{\cdot}} = \omega_2; \ \omega_i = \mathrm{const}, \ \omega_1 / \omega_2 = \gamma$$

Следовательно, динамическая система $(T^2, g^t_{T^2}, \nu)$ вполне определяется одним инвариантом — числом вращения $\gamma = \omega_1 / \omega_2$.

Замечание 1. У любой динамической системы на двумерном торе вида $\varphi_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \omega_i$ $(i = 1, 2)$ есть на самом деле бесконечно много чисел вращения, но все они выражаются через одно $\gamma = \omega_1 / \omega_2$ при помощи соотношения

$$\Gamma = \frac{a\gamma + b}{c\gamma + d}, \qquad \text{где} \quad \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$$

— унимодулярная матрица. В частности, $1 / \gamma$ — также число вращения.

Для торов, соответствующих области *1* на фигуре, числа вращения даются формулой (2.6). Заметим, что число вращения для области *9* то же, что и для области *1*. Значит, при малых μ динамические системы, возникающие на двух связных компонентах множества E, изоморфны.

Замечание 2. Числа вращения векторных полей на двумерных инвариантных торах задачи Эйлера — Пуансо вычислены в [5], там же указаны некоторые их свойства. В случае Лагранжа — Пуассона числа вращения равны отношению периода изменения угла нутации к периоду среднего собственного вращения.

3. О приведении дифференциальных уравнений на торе. Систему уравнений (2.5) можно привести к еще более простой форме. Так как уравнения этого вида часто встречаются при исследовании интегрируемых динамических систем, рассмотрим общий случай таких уравнений, заданных на n-мерном торе T^n

$$\begin{aligned} &q_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \lambda_i / F(q_1, \ldots, q_n), \quad i = 1, \ldots, n \\ &\lambda_i = \mathrm{const}, \ F = f_1(q_1) + \ldots + f_n(q_n); \ F > 0 \ (< 0) \ \text{на} \ T^n \end{aligned} \tag{3.1}$$

Без ущерба для общности можно считать все λ_i отличными от нуля.

Теорема. Если $f_i(q_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — непрерывные функции, то дифференцируемой заменой переменных система (3.1) приводится к виду

$$\varphi_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \lambda_i / \Lambda, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\Lambda = \frac{1}{(2\pi)^n} \oint\limits_{T^n} F(q_1, \ldots, q_n)\, dq_1 \ldots dq_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f_i(x)\, dx$$

Для доказательства достаточно проверить, что одной из таких замен переменных является следующая:

$$\varphi_i = \frac{\lambda_i}{I} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} [F_j(q_j) - I_j q_j] + q_i$$

$$F_j(t) = \int\limits_0^t f_j(x)\, dx, \qquad I_j = \frac{1}{2\pi} F_j(2\pi), \quad I = I_1 + \ldots + I_n$$

Эта теорема применима к уравнениям (2.5) и дает следующий результат: существует замена переменных, приводящая уравнения к системе

$$
(3.2)\qquad u^{\bullet} = \frac{\pi}{2\tau_1\Lambda}, \qquad v^{\bullet} = \frac{\pi}{2\tau_2\Lambda}
$$

$$
\Lambda = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} s_1(x)\,dx - \int_0^{2\pi} s_2(y)\,dy\right) \quad (\Lambda > 0 \text{ или } < 0)
$$

Здесь τ_i $(i = 1, 2)$ — периоды гиперэллиптического интеграла Ковалевской.

Данные преобразования содержат только алгебраические операции, вычисление интегралов от известных функций и обращение этих интегралов. Таким образом, уравнения (3.2), определяющие на двумерных инвариантных торах условно-периодическое движение, и есть те уравнения, которые должны существовать по теореме Лиувилля об интегрируемости.

Поступила 1 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М., Гостехиздат, 1953.
2. *Колмогоров А. Н.* Общая теория динамических систем и классическая механика. В кн.: Международный математический конгресс. Амстердам, 1954, М., Физматгиз, 1961.
3. *Татаринов Я. В.* К исследованию фазовой топологии компактных конфигураций с симметрией. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1973, № 5.
4. *Арнольд В. И.* Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики. Сиб. матем. ж., 1963, т. 4, № 2.
5. *Козлов В. В.* Геометрия переменных «действие — угол» задачи Эйлера — Пуансо. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1974, № 5.