Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

2

Отдельный оттиск

1 9 7 4

Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1974

МЕХАНИКА

УДК 531.3

В. В. КОЗЛОВ

О НЕСУЩЕСТВОВАНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К ИНТЕГРИРУЕМЫМ

1. Предположим, что прямое произведение двумерного тора $T^2\{\varphi_1\varphi_2 \bmod 2\pi\}$ на компактную область D плоскости $R^2\{I_1I_2\}$ снабжено естественной канонической структурой $\Omega^2=\sum\limits_{i=1}^{2} dI_i \wedge d\varphi_i$. Пусть на множестве $D\times T^2\times(-\varepsilon, \varepsilon)$ задана аналитическая функция

$$\mathscr{H}(I, \varphi, \mu)=\mathscr{H}_0(I)+\mu\mathscr{H}_1(I, \varphi)+\ldots \tag{1}$$

Функции $\mathscr{H}_k(I, \varphi)$ $(k=0, 1, 2\ldots)$ аналитичны в $D\times T^2$ и разлагаются в сходящиеся двойные ряды Фурье. Пусть, например,

$$\mathscr{H}_1(I, \varphi)=\sum_{-\infty}^{\infty} B_{m_1m_2}(I)\, e^{i(m_1\varphi_1+m_2\varphi_2)}.$$

Определение 1. Вековым множеством $\mathfrak{B}$ системы с гамильтонианом (1) называется множество всех пар $(I_1, I_2)\in D$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $m_1\omega_1+m_2\omega_2=0$, где $\omega_i=\dfrac{\partial\mathscr{H}_0}{\partial I_i}$, $m_i\in Z\,(i=1, 2)$;

2) $B_{m_1m_2}(I)\neq 0$.

Будем обозначать через $A(\mathfrak{M})$ класс функций, аналитических в области $\mathfrak{M}\subset R^n$.

Определение 2. Множество $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$ называется множеством единственности для класса $A(\mathfrak{M})$, если для любой функции f из $A(\mathfrak{M})$, равной нулю на $\mathfrak{N}$, справедливо равенство $f\equiv 0$ в области $\mathfrak{M}$.

Пусть область G плоскости $R^2\{I_1I_2\}$ является подобластью D и $\overline{G}\subset D$.

Теорема 1. Предположим, что для системы с гамильтонианом (1) выполнены следующие условия:

1) гессиан $\left|\dfrac{\partial^2\mathscr{H}_0}{\partial I^2}\right|\neq 0$ в области D;

2) $\mathfrak{B}\cap G$ является множеством единственности для класса $A(G)$;

3) функция $\mathscr{H}_0$ не имеет критических точек в области D. Тогда у системы с функцией Гамильтона (1) не существует двух независимых интегралов, аналитических в $D\times T^2\times(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Доказательство этой теоремы опирается на ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1 (А. Пуанкаре). Пусть невозмущенная система невырожденна, то есть $\left|\frac{\partial^2\mathscr{H}_0}{\partial I^2}\right|\neq 0$. Предположим, что система с функцией Гамильтона (1) обладает интегралом $\mathscr{F}(I, \varphi, \mu)$, аналитическим в $D\times T^2\times(-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда

1) $\mathscr{F}_0(I, \varphi)=\mathscr{F}(I, \varphi, 0)$ не зависит от φ;

2) якобиан $\frac{\partial(\mathscr{H}_0, \mathscr{F}_0)}{\partial(I_1, I_2)}=0$ на $\mathfrak{B}$.

Доказательство см. в работе [1].

Лемма 2. В предположениях теоремы 1

1) вековое множество $\mathfrak{B}$ задачи с гамильтонианом (1) состоит из счетного числа аналитических кривых, лежащих в области D;

2) $\mathfrak{B}$ является множеством единственности для $A(G)$ тогда, и только тогда, когда для любого $\delta>0$ существует круг K_δ радиуса δ, целиком лежащий в D, такой, что $\mathfrak{B}\bigcap K_\delta$ — множество единственности для $A(K_\delta)$.

Лемма 3 (индуктивная). Пусть выполнены условия теоремы 1 и леммы 1. Тогда существует достаточно малое δ, такое, что

1) в круге $K_\delta'\subset D$ справедливо равенство $\mathscr{F}_0=\Psi(\mathscr{H}_0)$, где $\Psi(x)$ аналитична при $x\in(\delta', \delta'')$; $\delta'=\min\limits_{K_\delta}\mathscr{H}_0$, $\delta''=\max\limits_{K_\delta}\mathscr{H}_0$, $\delta'<\delta''$;

2) существуют $\varepsilon_1>0$, $\delta_1>0$ ($\varepsilon_1<\varepsilon$, $\delta_1<\delta$), такие, что при малых μ функция $\frac{1}{\mu}\{\mathscr{F}-\Psi(\mathscr{H})\}$ — первый интеграл системы с гамильтонианом (1), аналитический в области $K_{\delta_1}\times T^2\times(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ ($K_{\delta_1}\subset K_\delta$).

Теорема 1 является распространением известного результата А. Пуанкаре о несуществовании аналитических интегралов канонических систем (см. [1, 2]) на случай, когда вековое множество задачи не всюду плотно в области D.

2. Приведем пример механической системы с двумя степенями свободы, удовлетворяющей условиям теоремы 1, но для которой $\mathfrak{B}$ не совпадает с областью D.

Рассмотрим на плоскости непересекающиеся эллипс и окружность: пусть (для упрощения вычислений) центр окружности совпадает с одним из фокусов эллипса. По этим кривым могут свободно перемещаться две тяжелые точки с массами m_1 и m_2, которые связаны между собой упругой пружиной с коэффициентом упругости k.

При $k=0$ имеем интегрируемый случай: независимое движение точек по инерции.

Параметры эллипса обозначим через p и e ($e\neq 0$), радиус окружности — через R. Положение масс на окружности и эллипсе будем задавать угловыми координатами $\theta_1\theta_2$ (в полярной системе координат с началом в центре окружности).

В канонических переменных $(\theta_1\theta_2\Theta_1\Theta_2)$ гамильтониан $\mathscr{H}_0$ невозмущенной задачи (при $k=0$) тождествен живой силе движения точек и имеет вид

$$\mathscr{H}_0=\frac{\Theta_1^2}{2m_1R^2}+\frac{\Theta_2^2(1+e\cos\vartheta_2)^4}{2m_2p^2(1+2e\cos\vartheta_2+e^2)}.$$

Функция Гамильтона возмущенной задачи есть

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mu\mathcal{H}_1, \qquad \mu = k, \tag{2}$$

где

$$\mathcal{H}_1 = R^2 + \frac{p^2}{(1+e\cos\vartheta_2)^2} - \frac{2Rp}{1+e\cos\vartheta_2}\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Переменные «угол — действие» $(\varphi_1\varphi_2 I_1 I_2)$ в невозмущенной задаче суть следующие: $\varphi_1 = \vartheta_1$, φ_2 — натуральный параметр эллипса,

$$I_1 = \Theta_1, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Theta_2(\mathcal{H}_0, \Theta_1, \vartheta_2)\, d\vartheta_2.$$

В этих переменных $\mathcal{H}_0 = \frac{I_1^2}{2m_1R^2} + \frac{I_2^2}{2m^2\Lambda^2}$, где $2\pi\Lambda$ — периметр эллипса. Возмущение в новых переменных примет вид

$$\mathcal{H}_1 = R^2 + \sum_{-\infty}^{\infty} B_{m,0}e^{im\varphi_2} + \sum_{-\infty}^{\infty} B_{m,1}e^{i(m\varphi_2+\varphi_1)} + \sum_{-\infty}^{\infty} B_{m,-1}e^{i(m\varphi_2-\varphi_1)},$$

коэффициенты $B_{m,0}$, $B_{m,1}$, $B_{m,-1}$ зависят только от p, e, R, но не от I. Здесь

$$\varphi_2 = \frac{p}{\Lambda}\int_0^{\vartheta_2} \frac{\sqrt{1+2e\cos\vartheta_2 + e^2}}{(1+e\cos\vartheta_2)^2}\, d\vartheta_2. \tag{3}$$

Старая угловая переменная ϑ_2 может быть выражена через эллиптические функции от φ_2. Действительно, в интеграле (3) перейдем от ϑ_2 к эксцентрической аномалии E по формуле

$$\frac{1}{1+e\cos\vartheta_2} = \frac{1-e\cos E}{(1-e^2)^2}.$$

Тогда интеграл (3) запишется так:

$$\varphi_2 = \frac{p}{(1-e^2)\Lambda}\int_0^E \sqrt{1-e^2\cos^2 E}\, dE,$$

а это есть не что иное, как эллиптический интеграл второго рода.

Заметим, что бесконечно много коэффициентов $B_{m,1}$ и $B_{m,-1}$ в разложении возмущающей функции отлично от нуля. Это следует из того, что эллиптические интегралы представляют собой неэлементарные функции. Уравнения $\omega_1 + m\omega_2 = 0$ $(m \in Z)$, где $(\omega_i = 1, 2)$ — частоты невозмущенной задачи, определяют на плоскости $R^2\{I_1 I_2\}$ прямые линии, проходящие через начало координат. Соответствующие коэффициенты в разложении возмущающей функции не зависят от переменных «действие» и среди них есть бесконечно много не равных нулю. Поэтому вековое множество $\mathfrak{B}$ задачи с функцией Гамильтона (2) состоит из бесконечного числа прямых, проходящих через начало координат и имеющих единственную предельную прямую $I_2 = 0$. Гессиан

$$\left|\frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial I_1 \partial I_2}\right| = \frac{1}{m_1 m_2 R^2\Lambda^2} \neq 0.$$

Очевидно, что $I_1 = I_2 = 0$ — единственная критическая точка H_0.

Пусть область D плоскости $R^2\{I_1I_2\}$ имеет с прямой $I_2=0$ непустое пересечение. Тогда $\mathfrak{B}\cap D$ является множеством единственности для класса $A(D)$. Действительно, пусть аналитическая функция $f(I_1, I_2)$ равна нулю на $\mathfrak{B}\cap D$. Фиксируя $I_1=\overset{\circ}{I_1}$, получаем аналитическую функцию одного переменного, нули которой имеют предельную точку $I_2=0$, лежащую внутри ее области аналитичности. Значит, f равна нулю на любой прямой $I_1=\overset{\circ}{I_1}$ и, следовательно, во всей области D. Таким образом, на множестве $D\{I_1I_2\}\times T^2\{\varphi_1\varphi_2 \bmod 2\pi\}\times(-\varepsilon, \varepsilon)$ для системы с гамильтонианом (2) выполнены все условия теоремы 1, но множество $\mathfrak{B}\cap D$ не всюду плотно в D.

3. У канонической системы с функцией Гамильтона (1) в общем случае вековое множество $\mathfrak{B}$ всюду плотно в D. По теореме 1, у таких систем, вообще говоря, не существует, кроме интеграла энергии, дополнительного интеграла, аналитического по каноническим переменным и параметру μ.

Возможно, однако, что общего второго интеграла не существует, но может существовать частный интеграл при каком-то фиксированном значении постоянной энергии h. Ниже мы покажем (теоремы 2, 3), что в общем случае этого также быть не может. Не существует частного интеграла, аналитического по каноническим переменным и по малому параметру μ, который введен в общей задаче. Мы воспользуемся редукцией канонической автономной системы с двумя степенями свободы к системе с одной степенью свободы с гамильтонианом, зависящим от времени (такой переход осуществляется на уровне энергии). Часто новый гамильтониан зависит от времени периодически.

Итак, предположим, что на множестве $(I'I'')\times T^2\{\varphi, t \bmod 2\pi\}\times\times(-\varepsilon, \varepsilon)$ задана аналитическая функция

$$\mathcal{H}(I, \varphi, t, \mu)=\mathcal{H}_0(I)+\mu\mathcal{H}_1(I, \varphi, t)+\ldots \tag{4}$$

Функции $\mathcal{H}_k(I, \varphi, t)$ $(k=0, 1, 2\ldots)$ аналитичны на $(I'I'')\times T^2$ и разлагаются в сходящиеся двойные ряды Фурье. Пусть

$$\mathcal{H}_1=\sum_{-\infty}^{\infty} B_{m_1m_2}(I)\,e^{i(m_1\varphi+m_2t)}.$$

Определение 3. Вековым множеством $\tilde{\mathfrak{B}}$ системы с гамильтонианом (4) называется множество всех импульсов $I\in(I'I'')$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $m_1\omega+m_2=0,\ \omega(I)=\dfrac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial I},\ m_i\in Z \qquad (i=1, 2);$

2) $B_{m_1m_2}(I)\neq 0.$

Теорема 2. Пусть система с гамильтонианом $\mathcal{H}_0$ невырожденна, то есть $\dfrac{\partial^2\mathcal{H}_0}{\partial I^2}\neq 0$. Пусть вековое множество $\tilde{\mathfrak{B}}$ задачи с функцией Гамильтона (4) является множеством единственности для класса $A(I'I'')$. Тогда система с гамильтонианом (4) не имеет интеграла $\mathcal{F}(I, \varphi, t, \mu)$, аналитического в области

$$(I'I'')\times T^2\{\varphi, t \bmod 2\pi\}\times(-\varepsilon, \varepsilon).$$

Доказательство этой теоремы опирается на следующую индуктивную лемму, которая потребуется нам в дальнейшем.

Лемма 4. Пусть $\dfrac{\partial^2\mathcal{H}_0}{\partial I^2}\neq 0$. Предположим, что у системы с функцией Гамильтона (4) существует аналитический интеграл

$$\mathcal{F}(I, \varphi, t, \mu) = \mathcal{F}_0(I, \varphi, t) + \mu \mathcal{F}_1(I, \varphi, t) + \ldots$$

Тогда

1) $\mathcal{F}_0(I, \varphi, t)$ зависит только от I;

2) $\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial I} = 0$, когда $I \in \tilde{\mathfrak{B}}$.

Замечание. Вековое множество $\tilde{\mathfrak{B}} \subset (I'I'')$ является множеством единственности для класса $A(I'I'')$ тогда, и только тогда, когда $\tilde{\mathfrak{B}}$ имеет предельную точку, лежащую внутри интервала $(I'I'')$.

С помощью теоремы 2 можно доказать следующее утверждение, относящееся к существованию частных аналитических интегралов.

Теорема 3. Пусть функция Гамильтона (1) удовлетворяет условиям:

1) $\omega_1 = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_1} \neq 0$ в области D;

2) отношение частот невозмущенной задачи ω_2/ω_1 непостоянно на уровне $\mathcal{H}_0 = h_0$;

3) существует область $G \subset D$, $\overline{G} \subset D$, такая, что $\mathfrak{B} \cap G$ является множеством единственности для класса $A(G)$;

4) каждая кривая из векового множества $\mathfrak{B}$ пересекается с $\mathcal{H}_0 = h_0$.

Тогда при малых μ

1) многообразие $\mathcal{H} = h_0((I_1, I_2) \in G)$ диффеоморфно $(I'I'') \times T^2$;

2) на этом инвариантном многообразии не существует частного интеграла системы с гамильтонианом (1), аналитического на $(\mathcal{H} = h_0) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

4. Рассмотрим пример. Качелями называется математический маятник, длина которого периодически изменяется со временем. Уравнения движения этой системы имеют канонический вид с функцией Гамильтона $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} - \omega^2(t) \cos q$ (здесь q — естественная угловая координата материальной точки и p — сопряженная с q каноническая переменная); $\omega(t+\tau) = \omega(t)$. Пусть $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 - \mu \cos \nu t)$, где μ — малый параметр и $\nu = \frac{2\pi}{\tau}$ — постоянное число (частота вынуждающей силы). (Подробности см. в книге [3].)

Когда $\mu = 0$, имеем интегрируемый случай — математический маятник. В этой интегрируемой задаче можно перейти к переменным «угол — действие» (φ, I). Обозначим через I_c значение переменной «действие», соответствующей движению по сепаратрисам. Каноническое преобразование $(q, p) \to (\varphi, I)$ аналитично и взаимно-однозначно в двух областях: внутри сепаратрис и вне этой области при этом оно не продолжается по аналитичности через сепаратрисы. В частности, функция $\mathcal{H}_0(I)$ не аналитична на интервале $(I'I'')$, содержащем точку I_c.

Нетрудно показать, что вековое множество задачи $\tilde{\mathfrak{B}}$ имеет лишь одну предельную точку $I = I_c$. Поэтому $\tilde{\mathfrak{B}}$ является множеством единственности для $A(I'I'')$ тогда, и только тогда, когда $I_c \in (I'I'')$. Однако гамильтониан $\mathcal{H}$ не аналитичен в области $(I'I'') \times T^2\{\varphi, t \bmod 2\pi\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Поэтому теорему 2 в этом случае непосредственно применить нельзя. Тем не менее можно доказать следующее утверждение: не существует интеграла этой задачи, аналитического на множестве $D \times T^1\{t \bmod 2\pi\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, где D — область на фазовом цилиндре $\{q, p\}$, содержащая обе сепаратрисы.

Действительно, пусть такой интеграл существует и есть

$$\mathcal{F}(q, p, t, \mu) = \mathcal{F}_0(q, p, t) + \mu \mathcal{F}_1(q, p, t) + \ldots$$

Из невырожденности невозмущенной задачи легко следует, что $\mathcal{F}_0$ не зависит от t. Использовав лемму 4 и взаимную однозначность перехода к переменным «действие — угол» внутри сепаратрис и вне их, получим, что $\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial p}=\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial q}=0$ на инвариантных кривых невозмущенной задачи, которые расположены на цилиндре $\{q, p\}$ и отвечают переменным «действие» $I \in \widetilde{\mathfrak{B}}$. Множество всех таких инвариантных кривых в области D является множеством единственности для класса $A(D)$. Поэтому $\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial p}=\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial q}\equiv 0$ в D, то есть $\mathcal{F}_0=\mathrm{const}$. Эту константу можно считать равной нулю. Тогда $\mathcal{F}_1+\mu\mathcal{F}_2+\dots$ тоже — первый интеграл задачи с гамильтонианом $\mathcal{H}$. Как и выше, снова получим, что $\mathcal{F}_1$ не зависит от t и является константой. Этот процесс можно продолжить сколь угодно далеко и прийти к заключению, что все функции $\mathcal{F}_k$ — постоянные величины. Тогда $\mathcal{F}$ будет просто постоянной. Это доказывает изложенное выше утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 1. Paris, 1892.
2. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.—Л., ОНТИ, 1937.
3. Arnold V. I., Avez A. Problémes érgodiques de la mécanique cllassique. Paris, 1967.

V. V. Kozlov

SUR LA NON-EXISTENCE DES INTÉGRALES ANALYTIQUES DES ÉQUATIONS CANONIQUES DANS LE VOISINAGE DES SYSTÈMES INTÉGRABLES

L'article développe les idées classiques de Poincaré et démontre la non-existence d'intégrales analytiques et uniformes dan les systèmes canoniques intégrables perturbés. Qui plus est, une telle intégrale généralement ne peut exister même sur un niveau d'énergie arbitraire.

Les théorèmes établits sont illustrés par plusieurs exemples mécanique..