МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

ПРЖИЯЛКОВСКИЙ ВИКТОР ВЛАДИМИРОВИЧ

УДК 512.76

ИНВАРИАНТЫ ГРОМОВА–ВИТТЕНА МНОГООБРАЗИЙ ФАНО

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук В. А. Исковских,
кандидат физико-математических наук В. В. Голышев

Москва — 2007

Оглавление

Соглашения и обозначения

Под инвариантами Громова–Виттена мы будем подразумевать только инварианты *рода ноль*.

Символом Похгаммера $\boldsymbol{(X)_n}$ мы будем обозначать произведение $X(X+1)\cdot\ldots\cdot(X+n-1)$, в котором X — элемент некоторого кольца (см. [AS72], 6.1.22). Бесконечное произведение $\prod_{a=-\infty}^{n-1}(X+a)$ мы будем обозначать через $\boldsymbol{[X]_n}$ (бесконечное произведение определяется формально; в тексте мы будем использовать лишь отношения двух бесконечных произведений, у которых все (кроме конечного числа) множители можно формально сократить).

Гомологии $H_*(X,\mathbb{Q})$ и когомологии $H^*(X,\mathbb{Q})$ мы будем обозначать через $H_*(X)$ и $H^*(X)$ соответственно.

Двойственный по Пуанкаре класс к классу $\gamma\in H^*(X)$ мы будем обозначать через $\gamma^\vee$.

Одним и тем же символом мы часто будем обозначать гиперповерхность и двойственный ей класс когомологий.

Все многообразия считаются определенными над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Глава 1

Введение

1.1 История вопроса

Зеркальная симметрия — одна из наиболее молодых и бурно развивающаяся областей математики. Возникнув в конце 1980-х годов в недрах теоретической физики, она сразу же заинтересовала математиков. По этой тематике были опубликованы работы Концевича, Манина, Вуазен, Тюрина, Яу, Ван Стратена, Дубровина, Фултона, Окунькова, Орлова, Кокса, Гивенталя и многих других. Феномен зеркальной симметрии нельзя охарактеризовать как принадлежащий какой-то одной классической ветви математики. Особый интерес зеркальной симметрии придает то, что она находится на стыке алгебраической геометрии, симплектической геометрии, топологии, гомологической алгебры, комбинаторики, математической физики и многих других наук.

Изучая теорию струн, физики заметили, что по каждому многообразию Калаби–Яу (то есть гладкому[1] односвязному алгебраическому многообразию с тривиальным каноническим классом) можно построить так назы-

[1]Или, более общо, имеющему канонические горенштейновы особенности.

ваемую суперконформную теорию поля. Математического ее определения пока нет (физическое определение использует фейнмановский интеграл, не вполне строго определенный математически). Эта теория изучает пары многообразий с двумя типами свойств: симплектическими с одной стороны и алгебро-геометрическими с другой.

Зеркально симметричное многообразие для многообразия Калаби–Яу V — это такое многообразие V', симплектические свойства которого трансформируются в алгебро–геометрические свойства исходного, и наоборот. Для чисел Ходжа это означает, что

$$h^{p,q}(V) = h^{n-p,q}(V'),$$

где n — (комплексная) размерность многообразий V и V'. Иными словами, ромбы Ходжа V и V' получаются друг из друга поворотом на $90°$; отсюда и название — зеркальная симметрия.

Несмотря на то, что такие конструкции базируются на нестрого определенных понятиях, с их помощью физикам удалось сделать конкретные численные предсказания. Отсчет этим предсказаниям, по-видимому, следует вести с знаменитой статьи [COGP91]. В этой статье обсуждается зеркальная симметрия для общей трехмерной квинтики.

Конструкция, приведенная в этой статье, является частным случаем конструкций зеркальной симметрии для полных пересечений. Рассмотрим пучок многообразий Калаби–Яу (по определению авторов, зеркально двойственный к общей трехмерной квинтике), являющийся разрешением особенностей пучка

$$\{(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5)|x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5 = zx_1x_2x_3x_4x_5\}/(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3,\ \ z \in \mathbb{A}^1,$$

где $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ действует на координатах $x_1, \ldots, x_5$ как группа диагональных матриц с корнями пятой степени из единицы на диагонали, определитель которых равен единице, по модулю скалярных матриц.

Уравнение Пикара–Фукса этого пучка имеет вид

$$\left(\left(z\frac{d}{dz}\right)^4 - 5z(5z\frac{d}{dz}+1)(5z\frac{d}{dz}+2)(5z\frac{d}{dz}+3)(5z\frac{d}{dz}+4)\right)\psi(z) = 0.$$

Рассмотрим функции $\psi_0(z), \ldots, \psi_3(z)$, определяемые из равенства

$$\sum_{i=0}^{3} \psi_i(z)\varepsilon^i + O(\varepsilon^4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+5\varepsilon)(2+5\varepsilon)\ldots(5n+5\varepsilon)}{((1+\varepsilon)(2+\varepsilon)\ldots(n+5\varepsilon))^5} z^{n+\varepsilon}.$$

В частности,

$$\psi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} z^n, \quad \psi_1(z) = (\log z)\psi_0(z) + 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} \left(\sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k}\right) z^n$$

и т. д.

Гипотеза Клеменса утверждает, что число n_d рациональных кривых степени d на трехмерной квинтике конечно. Эта гипотеза доказана для малых d; доказательство в общем случае опубликовано, но еще не до конца проверено (см. [Wa05a], [Wa05b]). Определим виртуальное число рациональных кривых степени d

$$N_d = \sum_{k|d} \frac{1}{k^3} n_{d/k}$$

(на первый взгляд кажущееся искусственным, это определение естественно с точки зрения теории инвариантов Громова–Виттена). Рассмотрим функцию

$$F(t) = \frac{5}{6}t^3 + \sum_{d\geqslant 1} N_d e^{dt}.$$

Предсказания зеркальной симметрии утверждают, что

$$F\left(\frac{\psi_1}{\psi_0}\right) = \frac{5}{2}\frac{\psi_1\psi_2 - \psi_0\psi_3}{\psi_0^2}.$$

Эта формула позволяет эффективно вычислить n_d для любого сколь угодно большого d. Числа, предсказанные этой формулой, совпадают с числами, вычисленными ранее: число прямых $n_1 = 2875$ было найдено еще в 19 веке Шубертом, число коник $n_2 = 609250$ было найдено Кацем в 1986 году (см. [Ka96]), число скрученных кубик $n_3 = 371206375$ — Эллингсрудом и Стромме в 1994 (см. [ES94]).

Естественно, такого рода предсказания не могли не заинтересовать математиков. В самом начале 1990-х годов они направили свои усилия на то, чтобы, во-первых, математически определить, а, во-вторых, обосновать и доказать обнаруженный физиками феномен. Вторая задача до сих пор не решена; некоторое продвижение в ней и есть цель настоящей диссертации. Однако для того, чтобы решить вторую задачу, необходимо прежде всего решить первую. А именно, необходимо "обойти" столь любимое физиками понятие суперконформной теории поля и сформулировать гипотезы о зеркальном соответствии многообразий в уже имеющихся математических терминах.

Математических версий зеркальной симметрии существует несколько (естественно, все они тесно связаны между собой). Мы остановимся на двух из них, наиболее разработанных: гомологической зеркальной симметрии и зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа. Перед их описанием отметим, что довольно скоро гипотезы зеркальной симметрии стали формулироваться не только для многообразий Калаби–Яу, но и для других классов многообразий (Батырев, Гивенталь, Хори, Вафа); наиболее интересные случаи — это случаи многообразий Фано (то есть многообразий с обильным антиканоническим классом).

Гипотеза гомологической зеркальной симметрии была предложена Концевичем на докладе на Математическом Конгрессе в 1994 году (см. [Kon94]). Объектами зеркальной симметрии являются гладкие алгебраические многообразия и пучки многообразий $W\colon Y \to \mathbb{A}^1$. Каждому алгебраическому многообразию X можно сопоставить *производную категорию когерентных пучков* $\mathcal{D}^b(CohX)$, то есть категорию, объектами которой являются комплексы пучков (на X) конечной длинны, а морфизмами — классы морфизмов по модулю гомотопической эквивалентности (то есть два морфизма называются эквивалентными, если они индуцируют изоморфизм когомологий комплексов). В контексте зеркальной симметрии эту категорию часто называют *D-браном типа B*. С другой стороны, каждому пучку $W\colon Y \to \mathbb{A}^1$ можно сопоставить (*производную*) *категорию исчезающих Лагранжевых циклов* $D(\mathrm{Lag}_{\mathrm{vc}}(W))$ (*D-бран типа A*, см. [Se00]).

Гипотеза гомологической зеркальной симметрии утверждает, что для каждого многообразия X найдется такой пучок W, что эти категории эквивалентны:

$$\mathcal{D}^b(CohX) \cong D(\mathrm{Lag}_{\mathrm{vc}}(W)).$$

Позднее эта гипотеза была (гипотетически) усилена. А именно, была сформулирована идея существования (*производной*) *категории Фукаи* $D\mathcal{F}(X)$, объекты которой — Лагранжевы подмногообразия, снабженные локальными системами (*D-бран типа A*). С другой стороны, в [Or03] Орлов определил *производную категорию особенностей* (*D-бран типа B*). Усиленная гипотеза гласит, что *для зеркальной пары, кроме вышеописанной эквивалентности, эквивалентны также категория Фукаи для X и производная категория особенностей для W*. Однако, так как категория

Фукаи не определена в полной мере, обычно под гомологической зеркальной симметрией понимают только первую эквивалентность.

Другая гипотеза зеркальной симметрии — зеркальная симметрия вариаций структур Ходжа. Она является первоначальной гипотезой, пришедшей из физики, и первой, имеющей строго математическую формулировку. Опишем ее для простоты в частном случае гладких многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ — именно этот случай мы будем рассматривать в диссертации.

Ключевым для этой гипотезы является понятие *инвариантов Громова–Виттена.* Теория инвариантов Громова–Виттена для проективных алгебраических многообразий была определена аксиоматически Концевичем и Маниным в 1994 году в знаменитой статье [KM94]; там же был предложен путь их конструктивного построения. Основная проблема была в построении компактифицированных пространств модулей стабильных отображений кривых. Эти пространства были построены в работах [BeMa96] и [Beh96]. Они являются не просто многообразиями, а *стеками Делиня–Мамфорда.* Инварианты Громова–Виттена определяются в терминах пересечений циклов на этих пространствах. Теория пересечений на стеках была построена Вистоли в [Vi89]. Эти стеки не всегда имеют ожидаемую размерность. Чтобы определить индексы пересечения когомологических классов на них, необходимо было определить *виртуальный фундаментальный класс* — цикл ожидаемой размерности в группе Чжоу, заменяющий обычный фундаментальный класс. Это было сделано в работах [Beh96] и [BF96].

Пусть X — многообразие Фано размерности N, $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ — класс алгебраической кривой, $d = (-K_X)\beta \geqslant 0$. *Родом* (возможно приводимой) связной кривой мы будем называть число $h^1(\mathcal{O}_C)$. Легко проверить, что связная кривая имеет род ноль тогда и только тогда, когда она является деревом неособых рациональных кривых. Связная кривая с отмеченными точками называется *предстабильной*, если ее особые точки являются обыкновенными двойными точками, а отмеченные точки являются неособыми. *Стабильным отображением* предстабильной кривой в многообразие X называется такое отображение, что на каждой стягиваемой компоненте кривой лежит как минимум три особые или отмеченные точки (то есть отображение, не имеющее инфинитезимальных автоморфизмов). Пространство модулей (являющееся стеком Деликня–Мамфорда) стабильных отображений кривых рода ноль в X с n отмеченными точками, образы которых лежат в классе гомологий β, обозначается как $\overline{M}_n(X,\beta)$, а его виртуальный фундаментальный класс как $[\overline{M}_n(X,\beta)]^{\mathrm{virt}} \in A_{N+d+n-3}(\overline{M}_n(X,\beta))$. Пусть $ev_i\colon \overline{M}_n(X,\beta) \to X$ — *отображение вычисления*, ставящее в соответствие стабильному отображению кривой образ ее i-й отмеченной точки. Пусть $\gamma_1,\ldots,\gamma_n \in H^*(X,\mathbb{Z})$. (*Примарным n-точечным*) *инвариантом Громова–Виттена* (*рода ноль*) называется число

$$\langle\gamma_1,\ldots,\gamma_n\rangle_\beta = \langle\gamma_1,\ldots,\gamma_n\rangle_d = ev_1^*(\gamma_1)\cdot\ldots\cdot ev_n^*(\gamma_n)\cdot[\bar{M}_n(X,\beta)]^{\mathrm{virt}},$$

если $\sum \operatorname{codim}\gamma_i = N+d+n-3$, и 0 иначе.

Это число не меняется при гладких деформациях многообразия X. Смысл этих чисел — (ожидаемое) число рациональных кривых степени d на X, пересекающих общие представители классов гомологий, двойственных $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$.

Инварианты Громова–Виттена позволяют определить кольцо (малых) квантовых когомологий — деформацию кольца когомологий многообразия. *Кольцом квантовых когомологий* называется кольцо, равное как $\mathbb{C}$-линейное пространство $H^*(X,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{C}[t]$, с квантовым умножением, определенным формулой

$$\gamma_1\star\gamma_2=\sum_{\gamma,d}t^d\langle\gamma_1,\gamma_2,\gamma^\vee\rangle_d\gamma,$$

где $\gamma_1,\gamma_2,\gamma\in H^*(X,\mathbb{Q})$, $\gamma^\vee$ — класс, двойственный по Пуанкаре классу γ, а элемент $\gamma\otimes 1$ мы обозначаем просто как γ. Сумма берется по $d\geqslant 0$ и элементам γ фиксированного базиса пространства $H^*(X)$. То, что это умножение ассоциативно, накладывает условия на инварианты Громова–Виттена. Эти условия, называемые *WDVV-уравнениями*, или *уравнениями ассоциативности*, следуют из аксиом Концевича–Манина. При конструктивном построении инвариантов они являются теоремами. Квантовое умножение определяет *квантовый $\mathcal{D}$-модуль*, то есть тривиальное расслоение на прямой со слоем $H^*(X,\mathbb{Q})$, в котором связность на постоянных сечениях задается квантовым умножением на канонический класс. Особенности этого $\mathcal{D}$-модуля в общем случае не регулярны. Процедура, позволяющая их сделать таковыми, называется *регуляризацией* (см. 2.2.1).

С другой стороны, рассмотрим расслоение $W\colon Y\to\mathbb{A}^1$. Пусть $\dim_{\mathbb{C}}Y=n+1$. Рассмотрим послойный n-цикл Δ_t и послойную голоморфную n-форму ω_t, $t\in\mathbb{A}^1$, непрерывно зависящие от точки на базе. *$\mathcal{D}$-модулем Пикара–Фукса* называется $\mathcal{D}$-модуль, решениями которого являются (возможно многозначные) функции (периоды) вида

$$\int_{\Delta_t}\omega_t.$$

Гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа утверждает, что *для каждого гладкого многообразия Фано существует такой пучок (“модель Ландау–Гинзбурга”), что его $\mathcal{D}$-модуль Пикара–Фукса изоморфен регуляризованному квантовому $\mathcal{D}$-модулю исходного многообразия.*

В диссертации изучается именно этот вариант зеркальной симметрии. В случае *квантово-минимального многообразия* Фано X размерности N, то есть многообразия с максимально просто устроенными квантовыми когомологиями (такими многообразиями являются, например, трехмерные многообразия Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ или полные пересечения), регуляризованный квантовый $\mathcal{D}$-модуль сводится к *дифференциальному оператору типа DN* (см. определение 2.34). Этот оператор можно алгоритмически выписать в терминах структурных констант квантового умножения на антиканонический класс многообразия — двухточечных инвариантов Громова–Виттена. Это позволяет эффективно изучать рассматриваемый нами случай гипотезы зеркальной симметрии, что выгодно отличает его от других вариантов общей гипотезы.

Таким образом, встает вопрос нахождения инвариантов Громова–Виттена многообразий Фано. Этот вопрос пока не решен в общем случае; однако в некоторых частных случаях ответ на него известен. Как уже упоминалось, инварианты Громова–Виттена — бесконечное множество чисел, связанных между собой некоторыми соотношениями. Первая теорема восстановления Концевича–Манина (см. [KM94]) гласит, что все они выражаются через двухточечные инварианты. Однако удобным оказывается “паковать” информацию об инвариантах и в другом виде. А именно, множество инвариантов можно расширить, рассматривая так называемые *инварианты Громова–Виттена с потомками* (см. определение 2.6). Нового знания они не добавляют, так как выражаются через примарные. Производящий ряд одноточечных инвариантов (введенный Гивенталем под названием J-ряда) называется *I-рядом* (см. определение 2.7); оказывается, по нему можно восстановить все инварианты квантово минимального многообразия, что дает еще одну систему порождающих для инвариантов Громова–Виттена. Этот ряд играет важную роль в теории Громова–Виттена. Например, в его терминах можно выписать решения уравнений типа DN или, что (гипотетически) то же самое, уравнения Пикара–Фукса. Одним из основных инструментов в нахождении инвариантов Громова–Виттена является квантовая теорема Лефшеца (Гивенталь, Лиан–Лиу–Яу, Ким, Гатманн). Она дает точный рецепт, как получить I-ряд гиперповерхности в многообразии Фано, зная I-ряд самого многообразия. Вкупе с вычислением инвариантов проективных пространств (Гивенталь, [Gi96]), грассманианов (гипотеза Хори–Вафа, Бертрам–Чиокан-Фонтанин–Ким, [BCK03]), многообразий (частичных) флагов (Гивенталь–Ким, [GK93]), произвольных однородных пространств (Фултон–Вудвард, [FW04]), гладких торических многообразий (Гивенталь, [Gi97]), трехмерных многообразий Фано, это дает множество примеров. Кроме того, Батырев ([Ba97], см. также [BCFKS98]) разработал метод нахождения инвариантов и моделей Ландау–Гинзбурга для многообразий Фано, допускающих малые торические вырождения, то есть вырождения к торическим многообразиям, допускающим малые разрешения (см. [Ba97], определение 3.1).

Первой задачей зеркальной симметрии является нахождение подходящих кандидатов на роль зеркально двойственных многообразий. При этом требований гипотезы зеркальной симметрии вариации структур Ходжа оказывается недостаточно: им удовлетворяет большое количество пучков, лишь немногие из которых подходят на роль зеркально двойственных моделей Ландау–Гинзбурга (например, общие элементы моделей Ландау–Гинзбурга должны быть бирационально эквивалентны многообразиям Калаби–Яу, тогда как большинство пучков не удовлетворяют этому свойству). Однако обычно бывает ясно, какую из предложенных ей моделей следует выбрать. К настоящему времени известны кандидаты на двойственные модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в гладких торических многообразиях (Батырев [Ba94], Батырев–Борисов [BB94], [BB95]), грассманианах и пространствах флагов (Батырев–Чиокан-Фонтанин–Ким–Ван Стратен, [BCFKS98]), многообразий Фано, допускающих малые торические вырождения (Батырев, [Ba97]) и поверхностей Дель Пеццо (Кацарков–Орлов–Уру, [AKO05]).

Естественно, такая богатая теория, как зеркальная симметрия, имеет много приложений в разных областях математики. Приведем два из них.

Первое приложение — классификация многообразий Фано. Согласно зеркальной симметрии, каждому многообразию Фано соответствует двойственная модель Ландау–Гинзбурга. Изучая ее свойства (основываясь на том, что она соответствует многообразию Фано), можно попытаться выделить конечное число пучков с подходящими свойствами. По этим пучкам можно восстановить численные инварианты многообразий Фано (инварианты Громова–Виттена, характеристические числа) и составить список их семейств. В трехмерном случае, более простом, чем многомерный, так как все гладкие трехмерные многообразия Фано с группой Пикара

$\mathbb{Z}$ квантово минимальны, классификация Исковских таких многообразий ([Is77], [Is78]) была воссоздана Голышевым в серии работ, а также автором в настоящей диссертации.

Второе приложение — доказательство нерациональности некоторых многообразий Фано. А именно, о нерациональности можно судить, следя за поведением двойственной модели Ландау–Гинзбурга и монодромии ее особых слоев при раздутии многообразия Фано (эта идея принадлежит, по-видимому, Кацаркову).

1.2 Основные результаты диссертации

Диссертация состоит из введения и трех глав.

Глава 2 посвящена общей теории инвариантов Громова–Виттена. Параграф 2.1 является подготовительным для всей диссертации и содержит основы теории Громова–Виттена. В частности, в нем определены инварианты Громова–Виттена (как примарные, то есть равные ожидаемым числам рациональных кривых данной степени, пересекающих общие представители данных классов гомологий, так и их обобщения, то есть *инварианты с потомками* — индексы пересечения естественных классов когомологий пространства модулей стабильных отображений рациональных кривых в многообразие). Эти инварианты подчинены некоторым соотношениям, одинаковым для всех многообразий данной размерности. При аксиоматическом определении инвариантов Громова–Виттена они являются аксиомами; при конструктивном построении инвариантов эти соотношения становятся теоремами. Например, *аксиома дивизора* гласит, что ожидаемое число кривых, лежащих в классе $\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})$ и пересекающих классы гомологий, двойственные классам $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in H^*(X, \mathbb{Z})$ и дивизору $H \in H^2(X, \mathbb{Z})$, равно инварианту Громова–Виттена, соответствующему β и $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, умноженному на βH.

Трехточечные инварианты определяют деформацию кольца когомологий многообразия — кольцо квантовых когомологий. Дивизориальное подкольцо кольца когомологий, то есть подкольцо, порожденное классами дивизоров, по определению замкнуто относительно умножения. Однако его квантовая деформация уже не обязательно замкнута (примерами таких многообразий являются грассманианы размерности > 4). Многообразия Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$, для которых эта деформация все-таки замкнута, называются *квантово минимальными*. Квантово минимальные многообразия — это естественные квантовые аналоги многообразий X таких, что $H^{p,q} = \mathbb{Z}$, если $p = q$, и 0 в противном случае; примерами являются трехмерные многообразия Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ или полные пересечения. В дальнейшем, если не оговорено особо, мы будем рассматривать квантово минимальные многообразия, а под квантовыми когомологиями понимать их дивизориальную часть, то есть подкольцо, порожденное классами дивизоров. Соотношения позволяют выразить любой инвариант Громова–Виттена через несколько “базисных” инвариантов. Такими базисными инвариантами могут быть примарные двухточечные инварианты или одноточечные инварианты с потомками.

Одноточечный инвариант Громова–Виттена квантово минимального многообразия X размерности N, соответствующий классу $H^j = (-K_X)^j$, кривой (антиканонической) степени d и степени i относительно потомков (см. определение 2.6) обозначается через $\langle \tau_i H^j \rangle_d$. Рассмотрим I-ряд, то есть производящий ряд

$$I^X = 1 + \sum_{0\leqslant j\leqslant N, d>0} \langle \tau_{d+j+2} H^{N-j}\rangle_d t^d h^j / H^N \in \mathbb{C}[[t]][h]/h^{N+1}$$

одноточечных инвариантов Громова–Виттена. Квантовая теорема Лефшеца объясняет, как преобразуется этот ряд при переходе от многообразия к гиперповерхности в нем; в диссертации приведены точные формулы такого перехода для многообразий Фано и Калаби–Яу.

В этом же параграфе приведены теоремы, определяющие I-ряды грассманианов и гладких торических многообразий (в параграфе 3.1 мы обобщаем этот результат на случай гладких полных пересечений в особых торических многообразиях). Эти теоремы, вместе с точными формулами восстановления трехточечных инвариантов Громова–Виттена многообразия по его I-ряду, позволяют эффективно найти квантовые когомологии полных пересечений в грассманианах и торических многообразиях.

Параграф 2.2 посвящен квантовым $\mathcal{D}$-модулям. Умножение в квантовых когомологиях многообразия X позволяет определить структуру $\mathcal{D}$-модуля в тривиальном расслоении на торе $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ со слоем $H^*(X, \mathbb{Q})$, $\mathbb{G}_\mathrm{m}$-эквивариантное дифференцирование на постоянных сечениях которого действует квантовым умножением на канонический класс. Регуляризация этого $\mathcal{D}$-модуля, по зеркальной гипотезе, изоморфна $\mathcal{D}$-модулю Пикара–Фукса соответствующей модели Ландау–Гинзбурга. В случае квантово минимального многообразия X размерности N эта конструкция заметно упрощается. А именно, рассмотрим *считающую матрицу*, то есть матрицу двухточечных инвариантов Громова–Виттена

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,N-1} & a_{0,N} \\ 1 & a_{1,1} & \dots & a_{1,N-1} & a_{1,N} \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{N,N} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} = \frac{j-i+1}{(-K_X)^N} \cdot$(ожидаемое число рациональных кривых степени $j-i+1$, пересекающих общие представители классов, двойственных к H^{N-j} и H^i). Регуляризованный квантовый $\mathcal{D}$-модуль задается оператором типа DN, который строится по этой матрице с помощью конкретного алгоритма. Мы доказываем следующую теорему — первый основной результат диссертации.

Теорема (следствие 2.49). *Рассмотрим регуляризованный I-ряд квантово минимального многообразия X*

$$\widetilde{I}^X = 1 + \sum_{0 \leqslant j < N, d > 0} \langle \tau_{d+j+2} H^{N-j} \rangle_d t^d h^j / H^N \cdot (h+1) \cdot \ldots \cdot (h+d) \in \mathbb{C}[[t]][h]/h^N.$$

Пусть $\widetilde{I}^X = \sum_{0 \leqslant k < N} \widetilde{I}^k h^k$, где $\widetilde{I}^i$ для каждого i — ряд от t. Тогда N функций

$$\widetilde{I}^0, \quad \widetilde{I}^0 \log(t) + \widetilde{I}^1, \quad \widetilde{I}^0 \log(t)^2/2! + \widetilde{I}^1 \log(t) + \widetilde{I}^2, \quad \dots$$

образуют базис ядра оператора типа DN для X.

Таким образом, решения уравнения, задающегося в терминах примарных двухточечных инвариантов Громова–Виттена выражаются в терминах одноточечных инвариантов. В частности, она позволяет переформулировать квантовую теорему Лефшеца в терминах дифференциальных операторов.

Рассмотрим уравнения типа DN, построенные по матрицам с переменными коэффициентами. Оказывается, их решения (как формальные ряды от коэффициентов матрицы) получаются друг из друга "ограничением". Это наталкивает на мысль о существовании универсальной теории Громова–Виттена для квантово минимальных многообразий, не зависящей от размерности многообразия. Такая теория построена в параграфе 2.3. А именно, определение инвариантов Громова–Виттена и соотношений между ними переформулировано в виде, не зависящем от объемлющего многообразия (это достигается "опусканием" одного коэффициента с помощью двойственности Пуанкаре). Далее, определено *минимальное кольцо Громова–Виттена* GW (см. определение 2.55), порожденное образующими и соотношениями, восходящими к теории Громова–Виттена. В диссертации доказывается следующая теорема, обобщающая первую теорему восстановления Концевича–Манина на абстрактный случай. Она является вторым основным результатом диссертации.

Теорема 2.56 **(абстрактная теорема восстановления)**. *Пусть* $r\colon \mathbb{C}[a_{ij}] \to GW$ *— отображение, переводящее* a_{ij} *в символы двухточечных инвариантов* (*более подробно см. в тексте диссертации*). *Тогда* r *является изоморфизмом.*

Таким образом, теория Громова–Виттена любого квантово минимального многообразия Фано — это отображение $GW \to \mathbb{C}$. Пространство модулей таких теорий — аффинное пространство, геометрические теории — точки на нем. Несмотря на то, что кольцо GW изоморфно свободному коммутативному кольцу, оно дает очень удобный язык для теорий Громова–Виттена: инварианты на этом языке — это универсальные многочлены от

a_{ij}. Все доказательства предыдущих параграфов основаны на соотношениях между инвариантами; таким образом, их можно дословно повторить в абстрактном случае. В частности, определить универсальный регуляризованный I-ряд, из которого решения уравнений типа DN получаются ограничением.

Следующая глава посвящена гипотезе зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа для трехмерных многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$. А именно, сопоставим такому многообразию не одну считающую матрицу A, а их семейство $A + \lambda E$, где E — единичная матрица. Следующая гипотеза относится к 17 трехмерным многообразиям Фано из списка Исковских. Для 12 из них утверждение гипотезы было проверено ранее; для 5 оставшихся многообразий гипотеза доказывается в диссертации. Это есть третий основной ее результат.

Гипотеза Голышева. *Для трехмерных гладких многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ решения уравнений $D3$ модулярны. Конкретнее, пусть X — такое многообразие, i_X — его индекс, а $N = \frac{\deg X}{2i_X^2}$ — его уровень*[2]*. Тогда в семействе считающих уравнений для X есть такое уравнение $L^{\lambda_X}[\Phi(z)] = 0$, решением которого является ряд Эйзенштейна веса 2 на модулярной кривой $X_0(N)$.*

Основываясь на этой гипотезе, Голышев предсказал считающие матрицы для всех 17 семейств многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ из списка Исковских. Для доказательства гипотезы необходимо проверить, что предсказанные матрицы и есть считающие матрицы для этих многообра-

[2] Здесь N временно обозначает не размерность, а уровень модулярной кривой, как это принято в теории модулярных форм.

зий. Для 12 из них считающие матрицы были найдены Бовилем (полные пересечения и многообразие V_5), Кузнецовым (V_{22}) и Голышевым (с помощью методов, разработанных в диссертации и теоремы Фултона–Вудворта для V_{12}, V_{16} и V_{18}). Матрицы для оставшихся многообразий получены в параграфе 3.3. А именно, с помощью квантовой теоремы Лефшеца, теоремы Бертрама–Чиокан-Фонтанина–Кима об I-ряде грассманиана и способов восстановления считающих матриц из I-рядов (параграф 3.2), в теореме 3.21 получены считающие матрицы многообразий V_{10} (сечения аффинного грассманиана $G(2,5)$ линейным подпространством коразмерности 2 и квадрикой в плюккеровом вложении) и V_{14} (сечения аффинного грассманиана G(2,6) линейным подпространством коразмерности 5 плюккеровом вложении).

Общие многообразия V_1 V_2 и V_2' являются двойным накрытием конуса над поверхностью Веронезе с ветвлением в гладкой кубике, двойным накрытием $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гладкой квартике и двойным накрытием $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гладкой секстике соответственно. Иными словами, их можно представить как полные пересечения во взвешенных проективных пространствах. Гипотеза Голышева для этих многообразий (теорема 3.22) следует из теоремы об I-ряде для гладких полных пересечений в (особых) торических многообразиях (теорема 3.12), доказанной в параграфе 3.1.

Наконец, глава 4 посвящена методам нахождения и изучению свойств слабых моделей Ландау–Гинзбурга — кандидатов на роль моделей Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано. Задача эта очень “трансцендентная”. Метод, использованный в диссертации, позволяет свести ее в некоторых случаях к комбинаторике.

Рассмотрим квантово минимальное многообразие X размерности N. Пусть $1 + a_1t + a_2t^2 + \ldots$ — аналитическое решение уравнения типа DN для него. Рассмотрим многочлен Лорана $f \in \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_N, x_N^{-1}]$. Пусть b_i — свободный член многочлена f^i.

Определение. Многочлен Лорана f называется *очень слабой моделью Ландау–Гинзбурга* для X, если $a_i = b_i$ для всех i.

Многочлен Лорана f называется *слабой моделью Ландау–Гинзбурга* для X, если он является очень слабой моделью Ландау–Гинзбурга для X и для общего $t \in \mathbb{C}$ гиперповерхность $(1 - tf = 0)$ бирационально эквивалентна многообразию Калаби–Яу.

Смысл этого определения объясняется следующим предложением, относящимся к математическому фольклору.

Предложение 4.3. *Ряд*

$$1 + b_1t + b_2t^2 + \ldots$$

является решением уравнения Пикара–Фукса для пучка $\{(1 - tf), t \in \mathbb{C}\}$.

Кроме того, общая философия зеркальной симметрии говорит о том, что общий слой модели Ландау–Гинзбурга должен быть многообразием Калаби–Яу.

Прямой способ нахождения слабых моделей Ландау–Гинзбурга состоит в следующем. Рассмотрим многочлен Лорана с неопределенными коэффициентами. Напишем свободные члены его степеней как многочлены от этих неопределенных коэффициентов и, зная решение уравнения типа DN, решим полученную систему уравнений. Однако этот способ неприемлем с вычислительной точки зрения: уже для трехмерных многообразий он оказывается очень громоздким. Поэтому надо вести поиск подходящих моделей не среди всех многочленов, а среди многочленов из некоторого более узкого класса. В параграфе 4.3 обсуждаются способы такого поиска. Как показывает опыт, многочлены должны быть "простые": имеющие много симметрий, имеющие маленькие целочисленные коэффициенты. Но основной способ связан с торическими каноническими (то есть с каноническими особенностями) вырождениями многообразий Фано. Общая философия говорит, что двойственная модель не зависит от деформации многообразия. Допустим, что трехмерное многообразие вырождается к торическому многообразию с каноническими особенностями. Тогда (гипотетически) выпуклая оболочка веера этого торического многообразия совпадает с многогранником Ньютона двойственной слабой модели Ландау–Гинзбурга. На данный момент для большинства трехмерных многообразий Фано неизвестно, допускают ли они канонические торические вырождения. Однако такое предположение помогает найти двойственные модели. В том же параграфе показано, что основные численные инварианты (антиканоническая степень, размерность антиканонической линейной системы, число Пикара) сохраняется при таких вырождениях. Для торического многообразия эти инварианты определяются комбинаторикой его многогранника. Таким образом, можно выделить небольшое число многогранников и искать слабые модели Ландау–Гинзбурга среди многочленов с такими многогранниками Ньютона. Такой подход подсказывает и естественную компактификацию слабых моделей Ландау–Гинзбурга — внутри торических многообразий, соответствующих этим многогранникам.

Венчает главу теорема 4.4 (четвертый основной результат диссертации), в которой находятся слабые модели Ландау–Гинзбурга для многообразий V_{16}, V_{18} и V_{22}. В параграфе 4.2 обсуждаются также свойства найденных моделей; они подтверждают предсказания других версий зеркальной симметрии. Метод, примененный в диссертации, применим и для гораздо более широкого класса многообразий. Автору неизвестны модели Ландау–Гинзбурга для многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$, не являющиеся компактификациями слабых моделей.

Результаты диссертации содержатся в работах (A1), (A2) и (A3).

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям В. В. Голышеву и В. А. Исковских за постановку задачи, помощь, постоянное внимание и многочисленные советы на всех этапах подготовки диссертации, а также благодарит М. Э. Казаряна, Д. О. Орлова, Ю. Г. Прохорова, И. Радлоффа, И. А. Чельцова и К. А. Шрамова за полезные обсуждения и замечания.

Глава 2

Инварианты Громова–Виттена и квантовые D-модули

2.1 Инварианты Громова–Виттена

2.1.1 Определения

Напомним, что на протяжении всей работы мы будем рассматривать инварианты *рода ноль*, то есть соответствующие рациональным кривым.

Аксиоматическое определение *примарных инвариантов* было дано Концевичем и Маниным в [KM94]. *Инварианты с потомками* были определены и построены в [BeMa96] и [Beh96].

Рассмотрим гладкое алгебраическое многообразие X.

Определение 2.1. *Кривой* называется приведенная схема чистой размерности 1. *Родом* кривой C называется число $h^1(\mathcal{O}_C)$.

Легко видеть, что связная кривая имеет род 0 тогда и только тогда, когда она является деревом рациональных кривых.

Определение 2.2. Связная кривая C с $n \geqslant 0$ отмеченными точками

$p_1, \ldots, p_n \in C$ называется *предстабильной*, если она имеет особенности не хуже обыкновенных двойных точек, а $p_1, \ldots, p_n$ — различные гладкие точки (см. [Ma02], III–2.1). Отображение $f\colon C \to X$ связной кривой рода 0 с n отмеченными точками называется *стабильным*, если C — предстабильная кривая, а на каждой ее стягиваемой компоненте лежит как минимум три отмеченные или особые точки ([Ma02], V–1.3.2).

Другими словами, стабильное отображение связной кривой — это отображение, имеющее лишь конечное число инфинитезимальных автоморфизмов.

Определение 2.3. *Семейством стабильных отображений* (над схемой S) кривых рода 0 с n отмеченными точками называется набор $(\pi\colon \mathcal{C} \to S, p_1, \ldots, p_n, f\colon \mathcal{C} \to X)$, где π — плоское проективное отображение с n сечениями $p_1, \ldots, p_n$, геометрические слои $(\mathcal{C}_s, p_1(s), \ldots, p_n(s))$ которого являются предстабильными кривыми рода 0 с n отмеченными точками, такими, что ограничение $f|_{\mathcal{C}_s}$ на каждый из этих слоев является стабильным отображением.

Два семейства над S

$$(\pi\colon \mathcal{C} \to S, p_1, \ldots, p_n, f), \quad (\pi'\colon \mathcal{C}' \to S, p'_1, \ldots, p'_n, f')$$

называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\tau\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, такой, что $\pi = \pi' \circ \tau$, $p'_i = \tau \circ p_i$, $f = f' \circ \tau$.

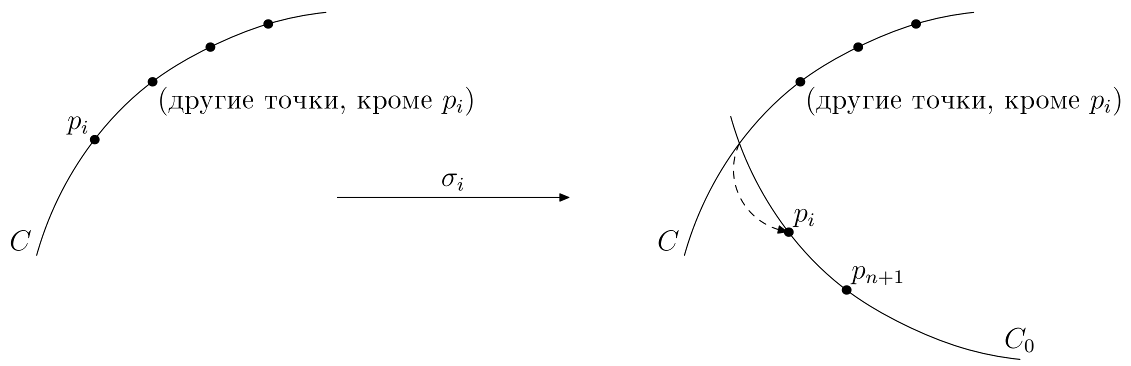
Пусть $\beta \in H_2(X)$. Рассмотрим следующий (контравариантный) функтор $\overline{\mathcal{M}}_n(X, \beta)$ из категории (комплексных алгебраических) схем в категорию множеств. Пусть $\overline{\mathcal{M}}_n(X, \beta)(S)$ — это множество классов изоморфизмов семейств стабильных отображений кривых рода 0 с n отмеченными точками $(\pi\colon \mathcal{C}\to S, p_1,\dots,p_n,f)$, таких, что $f_*([\mathcal{C}_s])=\beta$, где $[\mathcal{C}_s]$ — фундаментальный класс кривой $\mathcal{C}_s$.

Определение 2.4. *Пространством модулей отображений* в X кривых рода 0 класса $\beta\in H_2^+(X)$ с n отмеченными точками $\overline{M}_n(X,\beta)$ называется стек Делиня–Мамфорда (см. [Ma02], V–5.5), являющийся грубым пространством модулей (см. [HM04], определение 1.3), представляющим функтор $\overline{\mathcal{M}}_n(X,\beta)$.

Определение инвариантов Громова–Виттена дается в терминах теории пересечений на компактных стеках $\overline{M}_n(X,\beta)$, которая существует благодаря тому, что локально они являются фактором гладкого многообразия по конечной группе (см. [Vi89]). Однако эти стеки не всегда имеют ожидаемую размерность. Чтобы корректно оперировать с произведениями когомологических классов на них, необходимо ввести *виртуальный фундаментальный класс* $[\overline{M}_n(X,\beta)]^{\mathrm{virt}}$ виртуальной размерности $\operatorname{vdim}\overline{M}_n(X,\beta)=\dim X-\deg_{K_X}\beta+n-3$ (его конструкцию см. в [Ma02], VI–1.1). Во многих случаях (например, в случае однородных пространств) виртуальный фундаментальный класс совпадает с обычным.

Рассмотрим отображения $ev_i\colon \overline{M}_n(X,\beta)\to X$, $ev_i(C;p_1,\dots,p_n,f)=f(p_i)$. Пусть $\pi_{n+1}\colon \overline{M}_{n+1}(X,\beta)\to\overline{M}_n(X,\beta)$ — морфизм, забывающий точку p_{n+1} (и стягивающий компоненты, которые становятся нестабильными при забывании p_{n+1}), а $\sigma_i\colon \overline{M}_n(X,\beta)\to\overline{M}_{n+1}(X,\beta)$ — сечение, соответствующее отмеченной точке p_i, построенное по следующему правилу. Образом кривой $(C;p_1,\dots,p_n,f)$ при отображении σ_i является кривая $(C';p_1,\dots,p_{n+1},f')$, где $C'=C\bigcup C_0$, $C_0\backsimeq\mathbb{P}^1$, C_0 и C пересекаются в (не отмеченной на C') точке p_i, а точки p_{n+1} и новая p_i лежат на C_0. При этом

f' стягивает C_0 в точку, а $f'|_C = f$.



Пусть $L_i = \sigma_i^* \omega_{\pi_{n+1}}$, где $\omega_{\pi_{n+1}}$ — относительный дуализирующий пучок для π_{n+1}. Слоем L_i над точкой $(C; p_1, \dots, p_n, f)$ является $T^*_{p_i} C$.

Определение 2.5 (см. [Ma02], VI–2.1). *Кокасательным линейным классом* называется класс

$$\psi_i = c_1(L_i) \in H^2(\overline{M}_n(X, \beta)).$$

Определение 2.6 (см. [Ma02], VI–2.1). Рассмотрим классы когомологий $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in H^*(X)$. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — неотрицательные целые числа и $\beta \in H_2(X)$. Тогда *инвариант Громова–Виттена с потомками*, соответствующий этому набору, есть

$$\langle \tau_{a_1}\gamma_1, \dots, \tau_{a_n}\gamma_n \rangle_\beta = \psi_1^{a_1} ev_1^*(\gamma_1) \cdot \ldots \cdot \psi_n^{a_n} ev_n^*(\gamma_n) \cdot [\overline{M}_n(X, \beta)]^{\mathrm{virt}},$$

если $\sum \operatorname{codim} \gamma_i + \sum a_i = \operatorname{vdim} \overline{M}_n(X, \beta)$, и 0 иначе. Число $a = \sum a_i$ называется *степенью инварианта относительно потомков.* Инварианты с $a = 0$ называются *примарными* и равны ожидаемому числу рациональных кривых класса β на X, пересекающих общие представители циклов, двойственных классам $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, деленному на произведение степеней дивизоров, встречающихся среди γ_i. Символы τ_0 мы будем опускать.

Определение 2.7 (см. [Ga00]). Пусть X — алгебраическое многообразие. Пусть $\gamma_1,\ldots,\gamma_r$ — базис $H^*(X)$, а $\mu_1,\ldots,\mu_k$ — базис $H_2(X)$, такой что класс любой алгебраической кривой по модулю кручения β представляется в виде $\beta=\sum\beta_i\mu_i$, $\beta_i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Рассмотрим кольцо $B=\mathbb{C}[[t]]$, $t=(t_1,\ldots,t_k)$ и положим $t^\beta=\prod t_i^{\beta_i}$. Тогда *$I$-ряд* для X задается следующим образом.

$$I^X=1+\sum_{i,j\geqslant 0,\beta>0}\langle\tau_i\gamma_j^\vee\rangle_\beta t^\beta\gamma_j\in B\otimes H^*(X)$$

(мы будем использовать один и тот же символ для $\gamma\in H^*(X)$ и $1\otimes\gamma\in B\otimes H^*(X)$).

Фундаментальным членом I-ряда называется ряд

$$I^X_{H^0}=1+\sum_{\beta>0}\langle\tau_{(-K_X)\cdot\beta-2}\mathbf{1}^\vee\rangle_\beta t^\beta,$$

где $\mathbf{1}^\vee$ — класс, двойственный единице в когомологиях.

Лемма 2.8 ([Ga99], лемма 5.5 или доказательство леммы 1 из [LP01]). *Пусть $Y\subset X$ — гладкое полное пересечение в неособом многообразии X, а $\varphi^*\colon H^*(X)\to H^*(Y)$ — гомоморфизм ограничения. Пусть $\widetilde{\gamma}_1\in\varphi^*(H^*(X))^\perp\subset H^*(Y)$, а $\gamma_2,\ldots,\gamma_l\in\varphi^*(H^*(X))$. Пусть $\varphi_*\colon H_2(X)\to H_2(Y)$ — изоморфизм. Тогда инвариант Громова–Виттена на Y вида*

$$\langle\tau_{d_1}\widetilde{\gamma}_1,\tau_{d_2}\gamma_2,\ldots\tau_{d_l}\gamma_l\rangle_\beta$$

для всех чисел d_i равен нулю.

Определение 2.9. Рассмотрим полное пересечение $Y\subset X$. Пусть $\varphi^*\colon H^*(X)\to H^*(Y)$ — отображение ограничения, $R=\varphi^*(H^*(X))\subset H^*(Y)$. Пусть $\gamma_1,\ldots,\gamma_r$ — базис в R, а $\mu_1,\ldots,\mu_k$ — базис $H_2(Y)$, такой что любая кривая β представляется в виде $\beta=\sum\beta_i\mu_i$, $\beta_i\in\mathbb{Z}_+$. Рассмотрим кольцо $B=\mathbb{C}[[t]]$, $t=(t_1,\ldots,t_k)$ и положим $t^\beta=\prod t_i^{\beta_i}$. Тогда *ограниченный I-ряд* для Y задается следующим образом.

$$\check{I}^X = 1 + \sum_{i,j\geqslant 0,\beta>0} \langle \tau_i \gamma_j^\vee \rangle_\beta t^\beta \gamma_j \in B \otimes R \subset B \otimes H^*(Y).$$

Термин "ограниченный" будет применяться для инвариантов полного пересечения, соответствующих классам когомологий, ограниченных с объемлющего многообразия.

Замечание 2.10. Для полного пресечения $Y \subset X$ размерности три или больше $I^Y = \check{I}^Y$, так как $H_2(Y) \simeq H_2(X)$ и по лемме 2.8 и аксиоме дивизора 2.13 одноточечные инварианты, соответствующие примитивным классам, равны нулю.

Замечание 2.11. Инварианты, соответствующие двум и более классам, в которых участвуют примитивные когомологические классы промежуточной размерности, уже не обязательно равны нулю. Например, для двух примитивных классов α и β, гиперплоского сечения L и прямой ℓ на трехмерной кубике

$$\langle \alpha, \beta, L^2 \rangle_\ell = -\alpha \cdot \beta$$

(см. [Bea95], предложение 1).

2.1.2 Соотношения

Как уже отмечалось, инварианты Громова–Виттена — не произвольный набор чисел. Между ними существует множество соотношений (при аксиоматическом определении инвариантов эти соотношения являются аксиомами). Нам понадобятся некоторые из них. Для простоты изложения в дальнейшем мы будем использовать формально также инварианты Громова–Виттена, соответствующие кривым отрицательной степени или с отрицательными степенями относительно потомков, предполагая их по определению равными нулю. В следующих трех теоремах X — гладкое проективное многообразие.

Теорема 2.12 (аксиома фундаментального класса или уравнение струны, см. [Ma02], VI–5.1). *Пусть* $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in H^*(X)$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$. *Тогда*

$$\langle \tau_{a_1}\gamma_1, \ldots \tau_{a_k}\gamma_k, \mathbf{1}\rangle_\beta = \sum_{i=1}^{k} \langle \tau_{a_1}\gamma_1 \ldots \tau_{a_{i-1}}\gamma_{i-1}, \tau_{a_i-1}\gamma_i, \tau_{a_{i+1}}\gamma_{i+1}, \ldots, \tau_{a_k}\gamma_k\rangle_\beta.$$

Теорема 2.13 (аксиома дивизора, см. [Ma02], VI–5.4). *Пусть* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in H^*(X)$, $\gamma_0 \in H^2(X, \mathbb{Q})$ *— обильный дивизор, и* $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$. *Тогда*

$$\langle \gamma_0, \tau_{a_1}(\gamma_1), \ldots, \tau_{a_m}\gamma_m\rangle_\beta = (\beta \cdot \gamma_0)\langle \tau_{a_1}\gamma_1, \ldots, \tau_{a_m}\gamma_m\rangle_\beta + \sum_{s=1}^{m} \langle \tau_{a_1}\gamma_1, \ldots, \tau_{a_s-1}\gamma_0 \cdot \gamma_s, \ldots, \tau_{a_m}\gamma_m\rangle_\beta.$$

Теорема 2.14 (топологическая рекурсия, см. [Pa98], формула 6). *Пусть* $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ *— базис* $H^*(X)$. *Для любых классов* $\delta_1, \ldots, \delta_n, \nu_1, \nu_2, \nu_3 \in H^*(X)$, *чисел* $a_1, \ldots, a_n$ *и множества* $S \subset \{1, \ldots, n\}$ *обозначим последовательность* $\tau_{a_{s_1}}\delta_{s_1}, \ldots, \tau_{a_{s_k}}\delta_{s_k}$ $(s_1, \ldots, s_k$ *— различные элементы* $S)$ *через* $\coprod_S$. *Тогда для любого* $n \geqslant 0$

$$\langle \coprod_{\{1,\ldots,n\}}, \tau_{d_1}\nu_1, \tau_{d_2}\nu_2, \tau_{d_3}\nu_3\rangle_\beta = \sum \langle \tau_{d_1-1}\nu_1, \coprod_{S_1}, \gamma_a\rangle_{\beta_1} \langle \gamma_a^\vee, \coprod_{S_2}, \tau_{d_2}\nu_2, \tau_{d_3}\nu_3\rangle_{\beta_2},$$

где сумма берется по всем $\beta_1 + \beta_2 = \beta$, *разбиениям* $S_1 \sqcup S_2 = \{1, \ldots, n\}$ *и по всем* $0 \leqslant a \leqslant r$.

Эти теоремы позволяют во многих случаях выразить инварианты Громова–Виттена через небольшое их число. А именно, рассмотрим гладкое проективное многообразие X и самодвойственное кольцо $R \subset H^*(X)$, порожденное классами Черна элементов подгруппы группы Пикара $\operatorname{Pic} X$, такое что для любых $a, a_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\delta_1, \ldots, \delta_n \in R$ и $\nu \in R^\perp$

$$\langle \tau_{a_1}\delta_1, \ldots, \tau_{a_n}\delta_n, \tau_a\nu \rangle_\beta = 0.$$

Примерами таких колец являются подкольцо ограниченных когомологий полного пересечения в торическом многообразии (см. [Fu93], 5.2) или подкольцо кольца когомологий трехмерных многообразий Фано, порожденное группой Пикара.

Тогда, с помощью топологической рекурсии, все инварианты Громова–Виттена, соответствующие классам из R, можно выразить через примарные. Более того, верна следующая теорема.

Теорема 2.15 (первая теорема реконструкции Концевича–Манина, [KM94], теорема 3.1). *В приведенных выше обозначениях любой примарный инвариант, соответствующий классам из R, можно выразить через двухточечные инварианты.*

Доказательство этой теоремы в абстрактном случае содержится в доказательстве теоремы 2.56.

Другим “базисом” инвариантов Громова–Виттена являются одноточечные инварианты. Теоремы о выражении инвариантов через одноточечные были получены независимо Бертрамом–Клеем ([BK00], теорема 5.2) и Ли–Пандхарипанде([LP01], теорема 2, i).

Теорема 2.16 (Ли, Пандхарипанде, [LP01], теорема 2, i). *В приведен-*

ных выше обозначениях пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in R$, $L \in H^2(X) \cap R$, Δ^i *и* Δ_i *— двойственные базисы* R. *Тогда инвариант*

$$\langle \tau_{k_1}\gamma_1, \ldots, \tau_{k_n}\gamma_n\rangle_\beta$$

алгебраически выражается через одноточечные инварианты Громова–Виттена с потомками с помощью соотношений

$$\langle \tau_{k_1}\gamma_1, \ldots, \tau_{k_n} L\cdot\gamma_n\rangle_\beta = \langle \tau_{k_1} L\cdot\gamma_1, \ldots, \tau_{k_n}\gamma_n\rangle_\beta + \beta L\cdot\langle \tau_{k_1+1}\gamma_1, \ldots, \tau_{k_n}\gamma_n\rangle_\beta -$$
$$\sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} \beta_1 L\cdot \sum_{S^1\cup S^n=S,\ a} \langle \tau_{k_{s_1^1}}\gamma_{s_1^1}, \ldots, \tau_{k_{s_a^1}}\gamma_{s_a^1}, \Delta^a\rangle_{\beta_1}\cdot\langle \Delta_a, \tau_{k_{s_1^n}}\gamma_{s_1^n}, \ldots, \tau_{k_{s_b^n}}\gamma_{s_b^n}\rangle_{\beta_2}$$

и

$$\langle \tau_{k_1}\gamma_1, \ldots, \tau_{k_n+1}\gamma_n\rangle_\beta = -\langle \tau_{k_1+1}\gamma_1, \ldots, \tau_{k_n}\gamma_n\rangle_\beta +$$
$$\sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta,\\ S^1\cup S^n=S,\ a}} \langle \tau_{k_{s_1^1}}\gamma_{s_1^1}, \ldots, \tau_{k_{s_a^1}}\gamma_{s_a^1}, \Delta^a\rangle_{\beta_1}\cdot\langle \Delta_a, \tau_{k_{s_1^n}}\gamma_{s_1^n}, \ldots, \tau_{k_{s_b^n}}\gamma_{s_b^n}\rangle_{\beta_2},$$

где последние суммы в каждом равенстве берутся по всем таким разбиениям $S^1 = \{s_1^1, \ldots, s_a^1\}$ *и* $S^n = \{s_1^n, \ldots, s_b^n\}$ *множества* $S = \{1, \ldots, n\}$, *что* $1 \in S^1$ *и* $n \in S^n$.

Таким образом, для нахождения двухточечных примарных инвариантов многообразия достаточно знать его I-ряд, и наоборот.

2.1.3 Квантовые когомологии

Трехточечные инварианты Громова–Виттена позволяют определить деформацию его кольца когомологий.

Определение 2.17. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ — базис в $H^*(X)$, а $\mu_1, \ldots, \mu_k$ — базис в $H_2(X)$, такой что любая кривая β представляется в виде $\beta =$

$\sum \beta_i \mu_i$, $\beta_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Пусть $t^\beta = t_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot t_k^{\beta_k}$. *Кольцом квантовых когомологий* называется кольцо, равное как $\mathbb{C}$–модуль $QH^*(X) = H^*(X) \otimes \mathbb{C}[t]$, умножение в котором задается по формуле

$$\gamma_i \star \gamma_j = \sum_{k,\beta\geqslant 0} \langle \gamma_i, \gamma_j, \gamma_k^\vee \rangle_\beta \gamma_k t^\beta$$

(мы отождествляем классы $\gamma \in H^*(X)$ и $\gamma \otimes 1 \in QH^*(X)$).

Ассоциативность этого умножения следует из WDVV-уравнений, или уравнений ассоциативности, которые, в свою очередь, являются следствием соотношений топологической рекурсии (см. доказательство теоремы 2.56). При специализации $t = 0$ это кольцо становится кольцом когомологий многообразия: $(\gamma \star \mu)|_{t=0} = \gamma \cdot \mu$.

Допуская вольность речи, в тех случаях, для которых применимы теоремы восстановления (эти случаи мы и будем, в основном, рассматривать), мы будем говорить, что известны квантовые когомологии многообразия, если известны его двухточечные инварианты Громова–Виттена или I-ряд, и наоборот.

2.1.4 Грассманианы и торические многообразия

Опишем теперь квантовые когомологии некоторых многообразий.

Теорема 2.18 (Гипотеза Хори–Вафа ([HV00], Appendix A), доказательство см. в [BCK03]). *Пусть $x_1, \ldots x_r$ — корни Чженя расслоения S^* на $G = G(r,n)$, двойственного к тавтологическому подрасслоению, где $r > 1$. Тогда*

$$I^G = \sum_{d\geqslant 0} (-1)^{(r-1)d} \sum_{d_1+\ldots+d_r=d} \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}(x_i + d_i - x_j - d_j)}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}(x_i - x_j)\prod_{i=1}^r \prod_{l=1}^{d_i}(x_i + l)^n} t^d.$$

В случае $r = 1$ (*то есть для проективного пространства*)

$$I^{\mathbb{P}^{n-1}} = \sum_{d \geqslant 0} \prod_{i=1}^{d} \frac{t^d}{(L+i)^n},$$

где L — *класс, двойственный гиперплоскому сечению в плюккеровом вложении.*

Следствие 2.19 ([BCK03], предложение 3.5). *Фундаментальный член* (*см. определение 2.7*) *ряда* I^G *для* $G = G(2, n)$ *равен*

$$\sum_{d \geqslant 0} \frac{t^d}{(d!)^n} \frac{(-1)^d}{2} \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m}^n (n(d-2m)(\gamma(m) - \gamma(d-m)) + 2),$$

где $\gamma(m) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}$ *и* $\gamma(0) = 0$.

Гивенталь и Ким получили описание кольца квантовых когомологий многообразий частичных флагов ([GK93], теорема 1).

Фултон и Вудварт описали квантовое умножение на дивизор в многообразиях частичных флагов произвольных групп. Пусть G — связная односвязная полупростая комплексная группа Ли, $B \subset G$ — фиксированная борелевская подгруппа с максимальным тором T. Пусть $W = N(T)/T$ — группа Вейля, $R = R^+ \cup R^-$ — система корней (положительных и отрицательных), а Δ — множество простых корней. Отражения s_α в W нумеруются положительными корнями α; они называются простыми отражениями, если $\alpha \in \Delta$. Длиной $\ell(\omega)$ элемента $\omega \in W$ называется минимальное число простых отражений, произведение которых равно ω. Параболические подгруппы $P \subset G$ канонически соответствуют подмножествам $\Delta_P \subset \Delta$. Пусть R_P^+ — множество положительных корней, порожденных корнями из Δ_P. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$ — корневое разложение алгебры Ли G, то алгеброй Ли для P является прямая сумма $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{g}_\alpha$ для $\alpha \in R^+ \cup (-R_P^+)$.

Пусть группа W_P порождена отражениями s_α, $\alpha \in \Delta_P$. Пусть $u \in W/W_P$, а $\widetilde{u} \in W$ — его (однозначно определенный) представитель, имеющий минимальную длину. Пусть $X(u) = \overline{BuP/P}$ — многообразие Шуберта, соответствующее u, а $\sigma(u)$ — его класс. Он имеет коразмерность $\ell(u)$ в $X = G/P$; кольцо когомологий X порождено всевозможными такими классами. Для каждого положительного корня α положим

$$d(\alpha) = \sum_{\beta \in \Delta \setminus \Delta_P} d_{\alpha\beta}\sigma(s_\beta).$$

Положим $t = (t_{\beta_1}, \ldots, t_{\beta_r})$, $\beta_i \in \Delta \setminus \Delta_P$, и $t^\alpha = \prod t_{\beta_i}^{d_{\alpha\beta_i}}$. Пусть

$$n_\alpha = \sigma(s_\alpha) \cdot c_1(T_X).$$

Теорема 2.20 (Фултон–Вудварт, квантовая формула Шевалле, [FW04], теорема 10.1). *Пусть $\beta \in \Delta \setminus \Delta_P$, $u \in W/W_P$. Тогда*

$$\sigma_{s_\beta} \star \sigma_u = \sum_\alpha d_{\alpha\beta}\sigma_{\widetilde{u}s_\alpha} + \sum_\alpha t^\alpha d_{\alpha\beta}\sigma_{\widetilde{u}s_\alpha},$$

где первая сумма берется по всем $\alpha \in R^+ \setminus R^+_P$, для которых $\ell(v) = \ell(u) + 1$, где v — смежный класс $\widetilde{u}s_\alpha$ в W/W_P, а вторая сумма — по всем $\alpha \in R^+ \setminus R^+_P$, для которых $\ell(v) = \ell(u) + 1 - n_\alpha$.

Гивенталь сформулировал и доказал также, как найти квантовые когомологии полных пересечений в гладких торических многообразиях.

Теорема 2.21 (Гивенталь, [Gi97], теорема 0.1). *Пусть X — гладкое торическое многообразие, а Y — гладкое полное пересечение в нем с численно эффективным антиканоническим классом. Пусть $X_1, \ldots, X_k$ — дивизоры, соответствующие лучам веера X, дивизоры $Y_1, \ldots, Y_r$ задают Y,*

$\Lambda \subset H_2(X)$ — полугруппа циклов алгебраических кривых на Y, а $i\colon Y \to X$ — естественное вложение. Тогда

$$\check{I}^Y = e^{h(t)} \sum_{\beta \in \Lambda} t^\beta \cdot i^* \left(\frac{\prod_{a=1}^r [Y_a]_{\boldsymbol{\beta \cdot Y_a + 1}}}{\prod_{a=1}^r [Y_a]_{\mathbf{1}}} \frac{\prod_{a=1}^k [X_a]_{\mathbf{1}}}{\prod_{a=1}^k [X_a]_{\boldsymbol{\beta \cdot X_a + 1}}} \right),$$

где $h(t)$ — многочлен с носителем в кривых, пересекающихся с антиканоническим классом по 1 (то есть $h(t) = \sum_\beta h_\beta t^\beta$, где $\beta \cdot (-K_Y) = 1$).

Конкретный вид многочлена $h(t)$ можно вычислить (см. далее).

В теореме 3.12 мы обобщим этот результат на гладкие полные пересечения в особых торических многообразиях.

2.1.5 Квантовая теорема Лефшеца

Пусть Y — гиперповерхность в многообразии X, $-K_Y$ численно эффективен, а $I^X = \sum I^X_\beta t^\beta$. До конца параграфа для простоты будем считать, что $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}$; случай большего ранга группы Пикара аналогичен, но более громоздок. Также для простоты будем считать, что $H^{2k+1}(X) = 0$.

Определение 2.22 ([Ga00]). Пусть $Y \subset X$ — гиперповерхность. Тогда $\overline{M}_{(m)}(X, \beta) \subset \overline{M}_1(X, \beta)$ — подстек модулей кривых, имеющих кратность не меньше m в отмеченной точке на Y.

Определение 2.23 ([Ga00]). Пусть (в обозначениях леммы 2.8) $\gamma_0, \ldots, \gamma_N$ — базис в $\varphi(H^*(X))$. Положим

$$I_{\beta,(m)} = ev_* \left(\frac{1}{1-\psi} \cdot [\bar{M}_{(m)}(X, \beta)]^{\mathrm{virt}} \right) = \sum_{i,j} \langle \tau_j \gamma_i \rangle_{\beta,(m)} \cdot \gamma_i^\vee.$$

Замечание 2.24. Ясно, что $\overline{M}_{(0)}(X, \beta) = \overline{M}_1(X, \beta)$ и $I_{\beta,(0)} = I^X_\beta$. Если $m > Y \cdot \beta$, то положим $I_{\beta,(m)} = 0$.

Теорема 2.25 ("Наивная" зеркальная формула, [Ga00]). *Пусть* $-K_Y \cdot \beta \geqslant 2$ *для любого эффективного класса* $\beta \in H_2(Y)$. *Тогда*

$$I_\beta^Y = \prod_{i=0}^{Y\cdot\beta}(Y+i)\cdot I_\beta^X.$$

Для многообразия произвольного неотрицательного индекса зеркальная формула усложняется.

Положим ([Ga00])

$$s_\beta = (Y\cdot\beta - K_Y\cdot\beta - 1)\cdot\langle 1^\vee\rangle_{\beta,(Y\cdot\beta-K_Y\cdot\beta-1)}$$

$$r_\beta = (Y\cdot\beta - K_Y\cdot\beta)\cdot\langle Y^\vee\rangle_{\beta,(Y\cdot\beta-K_Y\cdot\beta)}.$$

Рассмотрим *мультииндексы* $\mu = (\mu_\beta)$, $\nu = (\nu_\beta)$, $\beta \in H_2^+(X)$ — последовательности неотрицательных целых чисел, пронумерованных эффективными когомологическими классами. Пусть

$$\sum\mu = \sum_\beta \mu_\beta, \qquad s^\mu = \prod_\beta s_\beta^{\mu_\beta},$$

$$\mu! = \prod_\beta \mu_\beta!, \qquad |\mu| = \sum_\beta \mu_\beta\cdot\beta.$$

Определим ([Ga00], определение 1.11) *корректирующий ряд*

$$P(x) = \sum_{\mu,\nu}((\prod_{i=1}^{\epsilon\sum\mu-1}(Y+Y\cdot(|\mu|+|\nu|)+x-i))\cdot(Y+x)^{\sum\nu}\cdot\frac{s^\mu}{\mu!}\frac{r^\nu}{\nu!}\cdot t^{Y\cdot(|\mu|+|\nu|)}),$$

где $\epsilon = 0$, если $-K_Y > 0$ и $\epsilon = 1$, если $-K_Y = 0$ (произведение пустого числа множителей равно нулю; $0^0 = 1$).

Лемма 2.26 ([Ga00], лемма 1.12). *В предыдущих обозначениях выполнено* $\frac{d^2}{dt^2}\ln P = 0$. *В частности, если* $P(x) = P_0 + P_1x + \ldots$, *то* $P(x) = P_0\exp(\frac{P_1}{P_0}x)$.

Теорема 2.27 (Зеркальная формула или квантовая теорема Лефшеца, [Ga00], следствие 1.13). *Пусть $Y \subset X$ — гладкая гиперповерхность в гладком многообразии, $-K_Y \geqslant 0$. Тогда*

$$\sum_{\beta} \prod_{i=0}^{Y \cdot \beta} (Y+i) \cdot I_{\beta}^{X} \cdot t^{Y \cdot \beta} = P_0 \cdot \sum_{\beta} I_{\beta}^{Y} \cdot \widetilde{t}^{Y \cdot \beta},$$

где $\widetilde{t} = t \cdot \exp \frac{P_1}{P_0}$.

Таким образом, общая формула получается из “наивной” формулы из теоремы 2.25 путем формальной замены переменной $t \to \widetilde{t}$ и домножения на ряд P_0.

Следствие 2.28. *Пусть $Y \subset X$ — гладкое полное пересечение Фано гиперповерхностей в гладком многообразии $Y_1, \ldots, Y_k$ степеней $d_1, \ldots, d_k$ индекса d. Пусть C — коэффициент ряда $I_{H^0}^{X}$ при $t^{d+\sum d_i}$. Тогда*

$$\sum_{\beta} \prod_{j=1}^{k} \prod_{i=0}^{Y_j \cdot \beta} (Y_j+i) \cdot I_{\beta}^{X} \cdot t^{Y \cdot \beta} = e^{\alpha_Y \cdot t^d} \cdot \sum_{\beta} I_{\beta}^{Y} \cdot t^{Y \cdot \beta},$$

где $\alpha_Y = \prod d_i! \cdot C$, если $d = 1$ и $\alpha_Y = 0$, если $d \geqslant 2$.

Доказательство. Если $d \geqslant 2$, то верна “наивная” формула (теорема 2.25), которая совпадает с утверждением следствия при $\alpha_Y = 0$. Пусть $d = 1$. Не ограничивая общности можно считать, что $Y = Y_1$ (и далее просто проитерировать формулу).

Тогда для любого $\beta > 0$ выполнено $Y \cdot \beta - K_Y \cdot \beta > Y \cdot \beta$, так что в выражении для корректирующего ряда $r = 0$, и, следовательно, $|\nu| = 0$. Так как $-K_Y > 0$, то $\epsilon = 0$. Значит, в $P(x)$ нет произведения, и (так как $\sum \nu = 0$), $P(x) = P_0$.

Далее, для $\deg_{-K_X} \beta > 1$ имеем $Y \cdot \beta - K_X \cdot \beta - 1 > Y \cdot \beta$ и $s_\beta = 0$. Значит, единственный ненулевой (возможно) член s_ℓ (где ℓ — класс прямой в антиканоническом вложении) равен $\alpha_Y = \deg X \cdot \langle 1^\vee \rangle_{\ell,(\deg Y)}$, а $\mu = (\sum \mu)$ — последовательность с единственным ненулевым членом. Поэтому

$$P = P_0 = \sum_{\mu} \frac{s^\mu}{\mu!} \cdot t^{Y\cdot|\mu|} = e^{\alpha_Y \cdot t^{\deg Y}}.$$

Осталось найти α_Y. Для этого заметим, что по соображениям размерности $\langle L^{\dim Y}\rangle_\ell = 0$, где L — гиперплоское сечение многообразия X. Сравнив коэффициенты обоих сторон зеркальной формулы при t^d и L^k, получим

$$\alpha_Y = \prod_{i=1}^{k} d_k! \cdot C,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Пусть X — гладкое многообразие, а $Y \subset X$ — гладкая гиперповерхность Калаби–Яу размерности N степени r. Положим

$$Y\left(\sum_{\beta\geqslant 0}\prod_{i=1}^{Y\cdot\beta}(Y+i)\cdot I_\beta^X\cdot t^{Y\cdot\beta}\right) = rL(F_0(t) + F_1(t)L + \ldots).$$

Следствие 2.29 (ср. [Ga00], пример 2.1). *Зеркальная формула для Y имеет вид*

$$Y\left(\sum_{d\geqslant 0}\prod_{i=1}^{Y\cdot\beta}(Y+i)\cdot I_\beta^X\cdot t^{Y\cdot\beta}\right) = F_0 \exp\left(\frac{F_1 L}{F_0}\right)\cdot \sum_\beta I_\beta^Y \cdot \left(\exp\frac{F_1}{rF_0}t\right)^{Y\cdot\beta}.$$

Доказательство. Сравним обе стороны зеркальной формулы по модулю $H^6(X)$. По соображениям размерности

$$I^Y = \sum I_\beta^Y t^\beta = 1 \pmod{H^4(Y)}.$$

Таким образом,

$$rL(F_0 + F_1 L) = rLP_0 \pmod{H^6(X)}.$$

Это значит, что $P|_{x=L=0} = F_0$ и $P'_L|_{x=L=0} = F_1$. Так как $P = P(x + rL)$, то $P'_x|_{x=L=0} = \frac{F_0}{r}$. Более того, $\partial_x^2 \ln P = 0$ по лемме 2.26. Итак,

$$P = F_0 \exp\left(\left(\frac{x}{r} + L\right) \cdot \frac{F_1}{F_0}\right).$$

Отсюда $P_0 = F_0 \exp\left(\frac{F_1 L}{F_0}\right)$ и $\frac{P_1}{P_0} = \frac{F_1}{rF_0}$. □

Таким образом, можно явно найти квантовые когомологии гладких многообразий Фано и Калаби–Яу — полных пересечений в (обобщенных) грассманианах, пространствах частичных флагов, торических многообразиях.

2.2 Квантовые D-модули

2.2.1 Определение

Пусть X — гладкое многообразие размерности N с группой Пикара $\mathbb{Z}$. Рассмотрим тор $\mathbb{T}_{\mathrm{NS}^\vee} \cong \operatorname{Spec} B$, $B = \mathbb{C}[t_0, t_0^{-1}]$, дважды двойственный решетке Нерона–Севери (то есть тор, решеткой характеров которого является решетка $\mathrm{NS}^\vee$, двойственная решетке Нерона–Севери). Рассмотрим тривиальное векторное расслоение HQ над $\mathbb{T}_{\mathrm{NS}^\vee}$ со слоем $H^*(X)$. Пусть $S = H^0(HQ)$. Квантовое умножение можно рассматривать как операцию $\star\colon S \times S \to S$, так как $S \cong QH^*(X) \otimes \mathbb{C}[t_0, t_0^{-1}]$. Рассмотрим кольцо дифференциальных операторов $\mathcal{D} = B[t_0 \frac{\partial}{\partial t_0}]$ и $D = t_0 \frac{\partial}{\partial t_0}$. Рассмотрим (плоскую) связность ∇ на HQ, на сечениях $\gamma \in H^*(X) \otimes 1$ определенную как

$$\left(\nabla(\gamma), t_0 \frac{d}{dt_0}\right) = K_X \star \gamma$$

(спаривание здесь — стандартное спаривание между дифференциальными формами и векторными полями). Эта связность задает структуру $\mathcal{D}$-модуля на S через $D(\gamma) = (\nabla(\gamma), D)$.

Обозначим этот $\mathcal{D}$-модуль через Q. В общем случае он не регулярен. Чтобы сопоставить ему регулярный $\mathcal{D}$-модуль Пикара–Фукса двойственной модели, его надо "регуляризовать". Пусть $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} = \operatorname{Spec}[t, t^{-1}]$ и $E = \mathcal{D}_{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}/\mathcal{D}_{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}(t\frac{\partial}{\partial t} - t)$ — экспоненциальный $\mathcal{D}_{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}$-модуль. Рассмотрим вложение $\mathbb{Z}(-K_X) \hookrightarrow \operatorname{Pic} X$. Естественный изоморфизм $\operatorname{Pic}(X) \cong \operatorname{NS}(X)$ (X — Фано) и двойная дуализация задает морфизм $j \colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{T}_{\mathrm{NS}^\vee}$. *Регуляризацией* $\mathcal{D}$-модуля Q называется $\mathcal{D}$-модуль $Q^{\mathrm{reg}} = j^*(\mu_*(Q \boxtimes j_*(E)))$, где $\mu \colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ — умножение, а $\boxtimes$ — внешнее тензорное произведение (иными словами Q^{reg} — свертка с антиканоническим экспоненциальным $\mathcal{D}$-модулем). Эта конструкция принадлежит Дубровину; связность в регуляризованном $\mathcal{D}$-модуле называется второй структурной связностью.

2.2.2 Случай квантово минимальных многообразий

Для построения зеркальной симметрии нас будет интересовать не весь квантовый $\mathcal{D}$-модуль, а лишь его "дивизориальная" часть. Повторим конструкцию квантового $\mathcal{D}$-модуля в этом случае.

Рассмотрим гладкое многообразие Фано X размерности N с $\operatorname{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$. Обозначим $H = -K_X$. (Естественное отображение $\operatorname{Pic}(X) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ — изоморфизм для гладких многообразий Фано, поэтому мы используем одно и то же обозначение для элемента кольца $\operatorname{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$ и его класса в $H^2(X)$.) Пусть $H^*_H(X) \subset H^*(X)$ — дивизориальное подпространство, то есть подпространство, порожденное степенями класса H.

Подпространство $H^*_H(X) \subset H^*(X)$ по определению замкнуто относительно умножения, то есть для любых классов $\gamma_1, \gamma_2 \in H^*_H(X)$ произведение $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ лежит в $H^*_H(X)$. Подпространство $QH^*_H(X) = H^*_H(X) \otimes \mathbb{C}[t]$ в общем случае уже не замкнуто относительно $\star$. Примерами многообразий X с незамкнутыми подпространствами $QH^*_H(X)$ являются грассманианы $G(k,n)$, $k,n-k>1$ размерности >4 (например, $G(2,5)$), а также их гиперплоские сечения размерности $\geqslant 4$.

Определение 2.30. В приведенных выше обозначениях многообразие Фано X называется *квантово минимальным*, если $QH^*_H(X)$ квантово замкнуто, то есть если для любых $\gamma_1,\gamma_2\in H^*_H(X)$, $\mu\in H^*_H(X)^{\perp}$, инвариант Громова–Виттена вида $\langle\gamma_1,\gamma_2,\mu\rangle_d$ равен нулю[1].

Другими словами, многообразие является квантово минимальным тогда и только тогда, когда $QH^*_H(X)$ является подкольцом кольца $QH^*(X)$.

В дальнейшем, на протяжении всей диссертации, мы будем рассматривать *квантово минимальные* многообразия.

Рассмотрим кольцо $B=\mathbb{C}[t,t^{-1}]$. Рассмотрим базис $\{H^i\}$, $i=0,\ldots,N$, в $H^*_H(X)$ (где H^0 — единица кольца и $H=H^1$). Пусть H_i — класс, двойственный по Пуанкаре к H^i. Пусть HQ — (тривиальное) векторное расслоение над $\operatorname{Spec}(B)$ со слоем $H^*_H(X)$. Положим, во избежание путаницы, $h^i=H^i\otimes 1\in H^*_H(X)\otimes B$. Пусть $h=h^1$, $k_X=K_X\otimes 1$ и $S=H^0(HQ)$. Так как $S\cong H^*_H(X)\otimes B$, то квантовое умножение можно рассматривать как отображение $\star\colon S\times S\to S$.

Пусть $D=t\frac{d}{dt}\in\mathcal{D}=\mathbb{C}[t,t^{-1},\frac{d}{dt}]$. Рассмотрим (плоскую) связность ∇

[1] Многообразие Фано называется когомологически минимальным, если его когомологии устроены самым простым образом (то есть $\mathbb{Z}$ в каждой четной размерности). Квантово минимальное многообразие имеет самую простую “квантовую антиканоническую часть”, сходную с кольцом квантовых когомологий минимального многообразия. Поэтому такие многообразия являются естественным аналогом классических когомологических минимальных многообразий Фано.

на HQ, определенную на сечениях h^i через

$$\left(\nabla(h^i), t\frac{d}{dt}\right) = k_X \star h^i.$$

Эта связность задает на S структуру $\mathcal{D}$-модуля с помощью $D(h^i) = (\nabla(h^i), D)$. Очевидно,

$$D\left(\sum_{i=0}^{N} f_i(t)h^i\right) = \sum_{i=0}^{N} t\frac{\partial f_i(t)}{\partial t}h^i - h\star\left(\sum_{i=0}^{N} f_i(t)h^i\right).$$

Определение 2.31. $\mathbb{C}$-линейный оператор $D\colon S \to S$ называется *квантовым оператором.*

Определим оператор $D_B\colon S \to S$ равенством $D_B(\sum_{i=0}^N f_i(t)h^i) = \sum_{i=0}^N t\frac{\partial f_i(t)}{\partial t}h^i$. Пусть $h\star h^j = \sum_i \alpha_{ij}h^i$, $\alpha_{ij} \in B$. Определим матрицу M равенством $M_{ij} = -\alpha_{ij}$ для $i \neq j$ и $M_{ii} = D - \alpha_{ii}$[2].

Определение 2.32. Дифференциальный оператор $L_X^Q = \det_{\mathrm{right}}(M) \in \mathcal{D}$ называется *квантовым дифференциальным оператором* для X.

(См. определение 2.36 для $\det_{\mathrm{right}}$.)

В дальнейшем мы будем изучать решения уравнений, соответствующих этим дифференциальным операторам. Решениями являются “формальные ряды с логарифмами”, которые не лежат в S. Поэтому необходимо сделать замену базы. Положим $T = \mathbb{C}[[t]][\ell]/(\ell^{N+1})$, $B^{form} = B\otimes_{\mathbb{C}[t]} T$ и $S^{form} = S\otimes_{\mathbb{C}[t]} T$. Пусть $\mathcal{D}$ действует на T через $D\ell = 1$. Таким образом, неформальный смысл ℓ — это $\log(t)$. В дальнейшем мы будем рассматривать D, D_B, $h\star$ и т. д. как $\mathbb{C}$-операторы $S^{form} \to S^{form}$ и L_X^Q как $\mathbb{C}$-оператор $B^{form} \to B^{form}$.

[2]Отождествим любую матрицу A с элементами из $\mathcal{D}$ с оператором $S \to S$, задающимся через $A(\sum f_ih^i) = \sum_i(\sum_j A_{ij}f_j)h^i$. Тогда M является матрицей оператора $D = D_B - h\star$.

Рассмотрим квантовый дифференциальный оператор

$$L_X^Q = P_{X,0}(D) + tP_{X,1}(D) + \ldots + t^n P_{X,n}(D) \in \mathcal{D}$$

гладкого многообразия Фано размерности N (обычно $n = N + 1$). Его особенности в общем случае нерегулярны.

Определение 2.33 (см. [Go05], 1.9). Оператор

$$\widetilde{L}_X = P_{X,0}(D) + tP_{X,1}(D) \cdot (D+1) + \ldots + t^n P_{X,n}(D) \cdot (D+1) \cdot \ldots \cdot (D+n)$$

называется *регуляризацией* оператора L_X^Q.

Особенности всех известных операторов $\widetilde{L}_X$ регулярны[3]. Очевидно, $\widetilde{L}_X$ делится на D слева.

Определение 2.34 (см. [Go05], определение 2.10). Оператор L_X, такой что $DL_X = \widetilde{L}_X$, называется (*геометрическим*) *оператором типа* DN. Уравнение, соответствующее этому оператору, называется *уравнением типа* DN.

Решения уравнений, соответствующих геометрическим операторам типа DN, гипотетически являются G-рядами[4]. Гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа утверждает, что для квантово минимального многообразия этот оператор должен совпадать с оператором Пикара–Фукса для зеркально двойственной модели Ландау–Гинзбурга.

[3]Они также регулярны, если матрица квантового умножения на антиканонический класс диагонализуема, см. [GS05], замечание 3.6.

[4]То есть для каждого решения вида $I = \sum a_i q^i$, $a_n \in \mathbb{Q}$, выполнено следующее. Пусть $a_n = \frac{p_n}{q_n}$, $(p_n, q_n) = 1$, $q_n \geqslant 1$. Тогда I имеет положительные радиусы сходимости в $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{Q}}_p$ для всех простых p, и существует константа $C < \infty$, такая что НОК$(q_1, q_2, \ldots, q_n) < C^n$ для всех n.

2.2.3 Решения уравнений типа DN

Решения уравнения типа DN гипотетически соответствуют периодам двойственной модели Ландау–Гинзбурга. Мы найдем их в терминах инвариантов Громова–Виттена, а, точнее, в терминах I-рядов. Для этого нам понадобятся некоторые предварительные сведения.

Некоммутативные определители.

Пусть R — ассоциативная $\mathbb{C}$-алгебра (не обязательно коммутативная). Мы будем рассматривать матрицы с элементами из R. Элементы M_{ij} матрицы M размера $N+1$ мы будем нумеровать индексами от 0 до N. Подматрица размера $i \times i$, расположенная в левом верхнем углу M называется *i-й ведущей подматрицей.*

Определение 2.35 ([GS05], определение 1.3). Матрица M с элементами из R называется *почти треугольной*, если $M_{ij} = 0$ для $i > j+1$ и $M_{i+1,i} = -1$.

Определение 2.36 ([GS05], определение 1.2). Рассмотрим матрицу M с элементами из R. *Правым определителем* матрицы M называется определитель, полученный с помощью разложения по крайнему правому столбцу:

$$\det_{\mathrm{right}}(M) = \sum_{i=0}^{N} M_{iN} C_{iN},$$

где C_{iN} — алгебраические дополнения, взятые как правые определители.

Лемма 2.37 (Голышев, Стинстра, см. [GS05], 1.4). *Пусть M — почти треугольная $(N+1) \times (N+1)$-матрица. Положим*

$$P_0 = 1, \qquad P_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} M_{ji} P_j.$$

Тогда P_i — правый определитель i-й ведущей подматрицы M. В частности, $P_{N+1} = \det_{\mathrm{right}}(M)$.

Доказательство. По индукции по размеру подматриц. Для $i = 1$ утверждение тривиально. Обозначим $(i+1)$-ю ведущую подматрицу матрицы M через M_{i+1}. Заметим, что правый определитель матрицы M^j_{i+1}, полученной удалением последнего столбца и j-й строки из M_{i+1}, равен

$$\det_{\mathrm{right}} M^j_{i+1} = (-1)^{i-j} P_j.$$

Таким образом,

$$\det_{\mathrm{right}} M_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{j+i} M_{ji} \det_{\mathrm{right}} M^j_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} M_{ji} P_j = P_{i+1}.$$

□

Для любой $(N+1) \times (N+1)$-матрицы $M = (M_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant N}$ определим матрицу M^τ как матрицу с элементами $M^\tau_{ij} = M_{N-j,N-i}$ (то есть M^τ — "матрица M, транспонированная относительно побочной диагонали").

Лемма 2.38 (ср. Голышев, Стинстра, предложение 1.7 из [GS05]). *Пусть M — почти треугольная матрица и $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_N)^T$. Пусть $M\xi = 0$. Тогда*

$$\det_{\mathrm{right}}(M^\tau) \xi_N = 0.$$

Доказательство. Мы имеем следующую систему уравнений на $\{\xi_i\}$:

$$\begin{cases} M_{0,0}\xi_0 + \ldots + +M_{0,N}\xi_N = 0 \\ -\xi_0 + M_{1,1}\xi_1 + \ldots + M_{1,N}\xi_N = 0 \\ \ldots \\ -\xi_{i-1} + M_{i,i}\xi_i + \ldots + M_{iN}\xi_N = 0 \\ \ldots \\ -\xi_{N-1} + M_{NN}\xi_N = 0. \end{cases}$$

Пусть P_i получены с помощью леммы 2.37, примененной к M^τ. Решая систему шаг за шагом (в обратном направлении) имеем $P_i\xi_N = \xi_{N-i}$. Таким образом,

$$\det\nolimits_{\text{right}} (M^\tau)\xi_N = \left(\sum_{i=0}^{N} M^\tau_{iN} P_i\right) \xi_N = \sum_{i=0}^{N} M_{0i}\xi_i = 0.$$

$\square$

Метод Фробениуса.

Рассмотрим произвольный ряд $I = \sum_{i=0}^N I^i(t)h^i \in \mathbb{C}[[t]][h]/(h^{N+1})$, $I^0(t), \ldots, I^N(t) \in \mathbb{C}[[t]]$. Пусть $I_r = \sum_{i=0}^r \left(I^{r-i}(t)\frac{\ell^i}{i!}\right) \in T$.

Определение 2.39. Ряд I называется *обобщенным решением* уравнения $PI = 0$ (или просто оператора $P \in \mathcal{D}$), если $PI_r = 0$ для всех $r \leqslant N$.

Другими словами, имея оператор $P = P(t, D)$, рассмотрим оператор $P_H = P(t, D_B)$, заменив D на D_B. Тогда ряд I является обобщенным решением P тогда и только тогда, когда $P_H(e^{h\ell} \cdot I) = 0$.

Мы опишем “алгебраическую” интерпретацию метода Фробениуса решения дифференциальных уравнений. Стандартную версию см. в [CL55], IV–8.

Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор

$$P = P_0(D) + tP_1(D) + \ldots + t^n P_n(D) \in \mathbb{C}[t, t\frac{d}{dt}].$$

Как и раньше, определим его регуляризацию через

$$\widetilde{P} = P_0(D) + tP_1(D) \cdot (D+1) + \ldots + t^n P_n(D) \cdot (D+1) \cdot \ldots \cdot (D+n).$$

Пусть $R = \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^{N+1})$, $N+1 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$P_\varepsilon = P_0(D+\varepsilon) + tP_1(D+\varepsilon) + \ldots + t^n P_n(D+\varepsilon) \in \mathcal{D} \otimes R.$$

Определение 2.40. Рассмотрим последовательность $\{\overline{c}_i\}$, $i \geqslant 0$, $\overline{c}_i \in R$. Она называется *ньютоновым решением* оператора P_ε, если для всех $m \in \mathbb{Z}$

$$\overline{c}_m P_n(m+\varepsilon) + \overline{c}_{m+1} P_{n-1}(m+1+\varepsilon) + \ldots + \overline{c}_{m+n} P_0(m+n+\varepsilon) = 0$$

(мы полагаем $\overline{c}_i$ для отрицательных i равными нулю).

Предложение 2.41. *Последовательность $\{\overline{c}_i\}$ является ньютоновым решением оператора P_ε тогда и только тогда, когда ряд*

$$I = \overline{c}_0 + t\overline{c}_1 + \ldots \in \mathbb{C}[[t]] \otimes R$$

является обобщенным решением оператора P.

Доказательство. Напомним, что $T = \mathbb{C}[[t]][\ell]/(\ell^{N+1})$. Рассмотрим T как $\mathbb{C}$-векторное пространство. Рассмотрим линейное пространство (над $\mathbb{C}$)

$$C = \{(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \ldots),\ \overline{a}_i \in R\}$$

с базисом $\{b_{ij}=(0,\dots,0,\varepsilon^{N-j},0,\dots), i\geqslant 0, 0\leqslant j\leqslant N\}$ (ε^{N-j} стоит на i-м месте) и изоморфизм $l\colon C\to T$, задающийся через $b_{ij}\mapsto t^i\ell^j/j!$. Легко проверить, что формулы $t\cdot b_{ij}=b_{i+1,j}$ и $D\cdot b_{ij}=(i+\varepsilon)b_{ij}$ определяют действие $\mathcal{D}$ на C. Очевидно, $l(t\cdot b_{ij})=t\cdot l(b_{ij})$ и $l(D\cdot b_{ij})=D\cdot l(b_{ij})$, то есть действия $\mathcal{D}$ на C и на T коммутируют. Таким образом, $P(\{\bar{c}_i\})=0$ тогда и только тогда, когда $P(I_N)=0$ (мы следуем обозначениям 2.39 с $h=\varepsilon$). Аналогично, если $P(\{\bar{c}_i\})=0$, то $P(I_r)=0$ для $0\leqslant r\leqslant N$. □

Замечание 2.42. Ньютоново решение оператора P_ε существует в R тогда и только тогда, когда $\mathrm{mult}_0 P_0\geqslant N+1$.

Замечание 2.43. Мы рассмотрели случай $P_0(0)=0$. Случаи других корней многочлена P_0 сводятся к нему с помощью сдвига координаты.

Следствие 2.44. Пусть $I=\sum a_{ij}t^i\varepsilon^j\in\mathbb{C}[[t]]\otimes R$ — обобщенное решение оператора P. Тогда ряд

$$\widetilde{I}=\sum a_{ij}t^i\varepsilon^j\cdot(\varepsilon+1)\cdot\ldots\cdot(\varepsilon+i)$$

является обобщенным решением оператора $\widetilde{P}$.

Доказательство. Это следует из формулы для $\widetilde{P}$ и предложения 2.41. □

Теперь все готово для того, чтобы найти решения уравнений типа DN. Для этого мы, воспользовавшись соотношениями между инвариантами Громова–Виттена и теорией некоммутативных определителей, докажем, что обобщенным решением уравнения $L_X^Q I=0$ является ряд I^X, а затем, с помощью метода Фробениуса, найдем решения регуляризации этого оператора.

Положим $e^{H\ell} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{H^r \ell^r}{r!} \in H_H^*(V) \otimes B^{form}$ (сумма конечна). Положим $\langle \tau_{d_1} \ell^{\alpha_1} \gamma_1, \ldots, \tau_{d_s} \ell^{\alpha_s} \gamma_s \rangle_d = \ell^{\sum \alpha_i} \cdot \langle \tau_{d_1} \gamma_1, \ldots, \tau_{d_s} \gamma_s \rangle_d$. Рассмотрим матрицу Φ с элементами

$$\Phi_a^b = \sum_{d \geqslant 0} t^d \big(\langle \tau_{d+a-b-1} H^b, H_a \rangle_d + \langle \tau_{d+a-b} \ell H^{b+1}, H_a \rangle_d +$$
$$\langle \tau_{d+a-b+1} \ell^2/2 H^{b+2}, H_a \rangle_d + \ldots \big) = \sum_{d \geqslant 0} t^d \langle \tau_\bullet e^{H\ell} H^b, H_a \rangle_d,$$

$0 \leqslant a, b \leqslant N$, где $\bullet$ здесь и в дальнейшем означает число, равное

$$N + d - 3 - \sum_{\text{элементы}} (\text{коразмерность когомологического класса} - 1).$$

Мы используем обозначение $\langle \tau_\bullet (H^1 + H^2), H_a \rangle_d$ для $\langle \tau_{d+a-2} H^1, H_a \rangle_d + \langle \tau_{d+a-3} H^2, H_a \rangle_d$ и т. д. Кроме того, так как двухточечные инварианты Громова–Виттена для кривых степени ноль не определены, мы полагаем $\langle \tau_\bullet e^{H\ell} H^b, H_a \rangle_0 = \langle H^0, \tau_\bullet e^{H\ell} H^b, H_a \rangle_0$.

Предложение 2.45 (Пандхарипанде, Гивенталь, предложение 2 в [Pa98]). *Рассмотрим сечения $\phi^i = \sum_{a=0}^N \Phi_a^i h^a \in S^{form}$ (соответствующие столбцам Φ[5]).*

1) *Сечения ϕ^i плоские, то есть $D\phi^i = 0$.*

2) *Если $D\phi = 0$, то $\phi = \sum_{i=0}^N \alpha_i \phi^i$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$.*

Доказательство (Пандхарипанде). **1)** Необходимо показать, что

$$D_B \phi^i = h \star \phi^i.$$

[5] Неформальный смысл Φ — это “матрица фундаментальных решений уравнения, задающегося квантовым оператором, в стандартном базисе”.

Левая часть уравнения равна

$$D_B\left(\sum_a \Phi^i_a h^a\right) = \sum_a \sum_{d\geqslant 0} \left(dt^d \langle \tau_\bullet e^{H\ell} H^i, H_a\rangle_d + t^d \langle \tau_\bullet H \cdot e^{H\ell} H^i, H_a\rangle_d\right) h^a =$$

$$\sum_a \sum_{d\geqslant 0} t^d \langle \tau_\bullet e^{H\ell} H^i, H, H_a\rangle_d h^a$$

по аксиоме дивизора 2.13. Правая часть уравнения равна

$$h \star \left(\sum_a \Phi^i_a h^a\right) = \sum_s \sum_{d_1, d_2 \geqslant 0} \sum_a t^{d_1} \langle \tau_\bullet e^{H\ell} H^i, H_a\rangle_{d_1} t^{d_2} \langle H^a, H, H_s\rangle_{d_2} h^s =$$

$$\sum_s \sum_d t^d \langle \tau_\bullet e^{H\ell} H^i, H, H_s\rangle_d h^s$$

по топологической рекурсии 2.14. Таким образом, обе стороны уравнения равны.

2) Свободным членом матрицы Φ (относительно ℓ и t) является единичная матрица. Таким образом, столбцы матрицы Φ линейно независимы. Дифференциальный оператор порядка $N+1$ имеет не более, чем $(N+1)$-мерное пространство решений, так что оно порождено $N+1$ функцией ϕ^i. □

Замечание 2.46. Рассмотрим матрицу M (см. определение 2.32). Предложение выше утверждает, что $M\Phi^i = 0$ для вектор-столбцов $\Phi^i = (\Phi^i_0, \ldots, \Phi^i_N)^T$, соответствующих сечениям ϕ^i.

Следствие 2.47. Определим матрицу Ψ как матрицу с элементами $\Psi^j_i = \sum_{d\geqslant 0} t^d \langle \tau_\bullet e^{H\ell} H_i,\ H^{N-j}\rangle_d$, $0 \leqslant i, j \leqslant N$. Пусть $\Psi_i = (\Psi^0_i, \ldots, \Psi^N_i)^T$ — ее вектор-столбцы. Тогда $M^\tau \Psi_i = 0$ для $0 \leqslant i \leqslant N$.

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 2.45. □

Теорема 2.48.

1) *Ряд I^X является обобщенным решением уравнения $L_X^Q I = 0$.*

2) *Если $L_X^Q I = 0$, то $I = \sum a_i I_i^X$ для некоторых $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. **1)** Мы имеем

$$L_X^Q I_i^X = L_X^Q \left(\frac{\ell^i}{i!} + \sum_{d>0} t^d \langle \tau_\bullet e^{H\ell} H_i \rangle_d \right) = L_X^Q \left(\sum_{d\geqslant 0} t^d \langle \tau_\bullet e^{H\ell} H_i,\ H^0 \rangle_d \right) =$$
$$\det\nolimits_{\mathrm{right}} (M) \Psi_i^N = \det\nolimits_{\mathrm{right}} (M^{\tau\tau}) \Psi_i^N = 0$$

по лемме 2.38 и следствию 2.47.

2) Решения I_s^X линейно независимы (по предложению 2.45), то есть они являются базисом $(N+1)$-мерного пространства решений дифференциального уравнения порядка $N+1$, соответствующего оператору L_X^Q. □

Найдем теперь решения уравнения типа DN.

Следствие 2.49. *Пусть X — гладкое квантово минимальное многообразие Фано размерности N и L_X^Q — соответствующий квантовый дифференциальный оператор. Пусть L_X — соответствующий оператор типа DN. Определим многочлены $I^i(h)$ от h через $I^X = \sum_{i=0}^{\infty} I^i(h) t^i$.*

1) *Пусть*

$$\widetilde{I}^X = \sum_{i=0}^{\infty} I^i(h) \cdot (h+1) \cdot \ldots \cdot (h+i) t^i.$$

Тогда ряд $\widetilde{I}^X \mathrm{mod}\ h^N$ является обобщенным решением уравнения $L_X I = 0$.

2) *Если $L_X I = 0$, то $I = \sum a_i \widetilde{I}_i^X$ для некоторых $a_0, \ldots, a_{N-1} \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. **1)** По теореме 2.48 ряд I^X является обобщенным решением оператора L_X^Q. Пусть $\widetilde{L}_X$ — регуляризация L_X^Q. Тогда, по следствию 2.44, $\widetilde{I}^X$ является обобщенным решением $\widetilde{L}_X$. Соотношения для ньютонова решения оператора $L_{X,\varepsilon}$ пропорциональны соответствующим соотношениям для $\widetilde{L}_{X,\varepsilon}$ по модулю ε^N (мы отождествляем параметр ε в методе Фробениуса с h). Таким образом, и ньютоновы решения этих операторов совпадают по модулю ε^N.

2) Это следует из стандартных соображений о линейной независимости (см. доказательство теоремы 2.48). □

Пример 2.50. Матрица квантового умножения для $\mathbb{P}^N$ равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & (N+1)^{N+1}t^{N+1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий квантовый дифференциальный оператор равен

$$L^Q_{\mathbb{P}^N} = D^{N+1} - (N+1)^{N+1}t^{N+1}.$$

Пусть F — класс, двойственный гиперплоскости в $\mathbb{P}^N$ (то есть $-K_{\mathbb{P}^N} = (N+1)F$) и $f = F \otimes 1 \in S^{form}$. Легко проверить, что ряд

$$I^{\mathbb{P}^N} = \sum_{d \geqslant 0} \frac{t^{(N+1)d}}{(f+1)^{N+1} \cdot \ldots \cdot (f+d)^{N+1}}$$

является обобщенным решением уравнения $L^Q_{\mathbb{P}^N}\Phi = 0$.

Оператор типа DN для $\mathbb{P}^N$ равен

$$L_{\mathbb{P}^N} = D^N - (N+1)^{N+1}t^{N+1}(D+1) \cdot \ldots \cdot (D+N),$$

а его обобщенным решением этого оператора является ряд

$$\widetilde{I}^{\mathbb{P}^N} = \sum_{d \geqslant 0} \frac{t^{(N+1)d}(h+1) \cdot \ldots \cdot (h+(N+1)d)}{(f+1)^{N+1} \cdot \ldots \cdot (f+d)^{N+1}}.$$

Наконец, для завершения изучения решений квантовых операторов, выведем явные формулы для их получения. Рассмотрим дифференциальный оператор $P = \sum_{i=0}^{N} t^i P_i(D) \in \mathcal{D}$. Обозначим его r-ю формальную производную по D через $P^{(r)}$.

Теорема 2.51. *Ряд $I = \sum_{i=0}^{N} I^i h^i$ (I^i — ряд от t) является обобщенным решением P тогда и только тогда, когда для всех $s \leqslant N$ выполнено равенство*

$$\frac{P^{(s)}(I^0)}{s!} + \frac{P^{(s-1)}(I^1)}{(s-1)!} + \ldots + P(I^s) = 0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$P(\ell J(t)) = \ell P(J(t)) + P^{(1)}(J(t))$$

для всех $J(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ (см. [BvS93], предложение 4.3.1). Таким образом,

$$P(\ell^r J) = \sum_{i=0}^{r} \binom{i}{r} \ell^i P^{(r-i)}(J).$$

Для любого $s \leqslant N$

$$P(I_s) = P\left(\frac{\ell^s}{s!} I^0 + \frac{\ell^{s-1}}{(s-1)!} I^1 + \ldots + I^s\right) = \sum_{\alpha=0}^{s} P\left(\frac{\ell^\alpha}{\alpha!} I^{s-\alpha}\right) =$$

$$\sum_{\alpha=0}^{s}\sum_{\beta=0}^{\alpha}\left(\binom{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\ell^\beta P^{(\alpha-\beta)}(I^{s-\alpha})}{\alpha!}\right) = \sum_{\alpha=0}^{s}\sum_{\beta=0}^{\alpha}\left(\frac{\ell^\beta P^{(\alpha-\beta)}(I^{s-\alpha})}{\beta!(\alpha-\beta)!}\right) = \sum_{\alpha=0}^{s}\sum_{\beta=0}^{\alpha} R_{\alpha,\beta},$$

где

$$R_{\alpha,\beta} = \frac{\ell^\beta P^{(\alpha-\beta)}(I^{s-\alpha})}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

Докажем теорему по индукции по s. Предположим, что она верна для всех $s_0 < s$. Тогда

$$\frac{P^{(s)}(I^0)}{s!}+\frac{P^{(s-1)}(I^1)}{(s-1)!}+\ldots+P(I^s) = \sum_{a=0}^{s}\frac{\ell^a}{a!}\left(\frac{P^{(s-a)}(I^0)}{(s-a)!}+\ldots+P(I^{s-a})\right) = \sum_{a=0}^{s}\sum_{b=0}^{s-a}\frac{\ell^a P^{(b)}(I^{s-a-b})}{a!b!} = \sum_{a=0}^{s}\sum_{b=0}^{s-a} S_{a,b},$$

где

$$S_{a,b} = \frac{\ell^a P^{(b)}(I^{s-a-b})}{a!b!}.$$

Очевидно, $S_{a,b} = R_{a+b,a}$, поэтому

$$\sum_{a=0}^{s}\sum_{b=0}^{s-a} S_{a,b} = \sum_{a=0}^{s}\sum_{b=0}^{s-a} R_{a+b,a} = \sum_{\alpha=0}^{s}\sum_{\beta=\alpha}^{s} R_{\beta,\alpha} = \sum_{0\leq\alpha\leqslant\beta\leqslant s} R_{\beta,\alpha} = \sum_{a=0}^{s}\sum_{b=0}^{a} R_{a,b}.$$

Таким образом,

$$\frac{P^{(s)}(I^0)}{s!}+\frac{P^{(s-1)}(I^1)}{(s-1)!}+\ldots+P(I^s) = P(I_s),$$

что доказывает теорему. □

Замечание 2.52. Для случая $s = 1$ эта теорема доказана в [BvS93], предложение 4.3.2, а для случая $s \leqslant 2$ — в [Tj98], Appendix B.

Предложение 2.53 (Метод Ньютона). *Ряд*

$$\Phi = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots \in B, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

является решением уравнения $P\Phi = 0$ (как формальный ряд) тогда и только тогда, когда для всех $m \in \mathbb{Z}$

$$a_m P_N(m) + a_{m+1}P_{N-1}(m+1) + \ldots + a_{m+N}P_0(m+N) = 0,$$

где $a_i = 0$ для $i < 0$.

Доказательство. Прямая подстановка. □

Теорема 2.51 и предложение 2.53 позволяют найти соотношения для решений уравнения $P\Phi = 0$.

Следствие 2.54. Пусть $I = \sum a_{ij}h^i t^j$. Тогда ряд I является обобщенным решением оператора P тогда и только тогда, когда для всех $s \leqslant N$ и $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{0,m}P_N^{(s)}(m) + a_{0,m+1}P_{N-1}^{(s)}(m+1) + \ldots + a_{0,m+N}P_0^{(s)}(m+N)}{s!} +$$
$$\frac{a_{1,m}P_N^{(s-1)}(m) + a_{1,m+1}P_{N-1}^{(s-1)}(m+1) + \ldots + a_{1,m+N}P_0^{(s-1)}(m+N)}{(s-1)!} + \ldots +$$
$$a_{s,m}P_N(m) + a_{s,m+1}P_{N-1}(m+1) + \ldots + a_{s,m+N}P_0(m+N) = 0.$$

2.3 Минимальное кольцо Громова–Виттена

Все формулы выше являются формальными следствиями формул 2.12–2.14. Поэтому естественно определить "абстрактную теорию Громова–Виттена", то есть рассмотреть инварианты Громова–Виттена как формальные переменные с естественными соотношениями. Кроме того, рассматривая "инварианты", соответствующие нескольким классам вида H^i и одному двойственному по Пуанкаре классу вида H_r, можно построить универсальную абстрактную теорию Громова–Виттена для квантово минимальных многообразий Фано, не зависящую от размерности N.

Определим *минимальное кольцо Громова–Виттена* GW как коммутативную алгебру с образующими и соотношениями, использующимися в теории Громова–Виттена. Такое определение похоже на идею формальных Фробениусовых многообразий, принадлежащую Дубровину, и аксиоматический подход к теории инвариантов Громова–Виттена, принадлежащий Концевичу и Манину. Разница в том, что мы не фиксируем размерность и рассматриваем "абстрактные инварианты Громова–Виттена для многообразия Фано неопределенной размерности".

Определение 2.55. Рассмотрим формальные символы вида

$$\langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \ldots, \tau_{d_{n-1}} H^{i_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle,$$

$n \geqslant 1$, $i_1, \ldots, i_{n-1}, r, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ (последний член имеет нижний коэффициент!). Для простоты мы будем писать H^i, H_j вместо $\tau_0 H^i$, $\tau_0 H_j$. Определим *степень* такого символа как число $\sum d_s + \sum i_s - r + (3 - n)$. Пусть F — множество символов неотрицательной степени. *Минимальным кольцом Громова–Виттена* называется градуированное кольцо

$$GW = \mathbb{C}[F]/_{\mathrm{Rel}},$$

где Rel — идеал, порожденный следующими соотношениями.

GW1 (аксиома S_n-транзитивности, ср. [KM94], 2.2.1): Рассмотрим произвольную перестановку $\sigma \in S_{n-1}$. Пусть $j_k = i_{\sigma(k)}$ и $f_k = d_{\sigma(k)}$. Тогда

$$\langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \ldots, \tau_{d_{n-1}} H^{i_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle = \langle \tau_{f_1} H^{j_1}, \ldots, \tau_{f_{n-1}} H^{j_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle.$$

GW2 (нормализация, ср. [KM97], 1.4.1): Пусть $r = \sum d_s + \sum i_s + (3 - n)$. Тогда

$$\langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \ldots, \tau_{d_{n-1}} H^{i_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle = \frac{(d_1 + \ldots + d_n)!}{d_1! \cdot \ldots \cdot d_n!} \cdot M,$$

где $M = 1$ если $\sum d_s = n - 3$ и $M = 0$ в противном случае.

GW3 (аксиома фундаментального класса, ср. [KM94], 2.2.3):

$$\langle H^0, \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_{n-1}} H^{i_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \tau_{d_1} H^{i_1} \dots \tau_{d_{i-1}} H^{i_{j-1}}, \tau_{d_i - 1} H_{i_j}, \tau_{d_{i+1}} H^{i_{j+1}}, \dots, \tau_{d_n} H_r \rangle,$$

за исключением случая $\langle H^0, H^i, H_i \rangle$, который определяется соотношением GW2.

GW4 (аксиома дивизора, ср. [KM94], 2.2.4):

$$\langle H^1, \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_{n-1}} H^{i_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle = d \cdot \langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_n} H_r \rangle + \sum_{s=1}^{n-1} \langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_s - 1} H^{i_s + 1}, \dots, \tau_{d_n} H_r \rangle + \langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_n - 1} H_{r-1} \rangle.$$

где $d > 0$ — степень левой части равенства.

GW5 (топологическая рекурсия, ср. [Pa98], формула 6) Для любых чисел $c_1, \dots c_n, i_1, \dots i_n$ и множества $S \subset \{1, \dots, n\}$ обозначим последовательность $\tau_{c_{s_1}} H^{i_{s_1}}, \dots, \tau_{c_{s_k}} H^{i_{s_k}}$ ($s_1, \dots s_k$ — различные элементы множества S) через $\coprod_S$. Тогда для любого $n \geqslant 0$

$$\langle \coprod_{\{1,\dots,n\}}, \tau_{d_1} H^{j_1}, \tau_{d_2} H^{j_2}, \tau_{d_3} H_r \rangle = \sum \langle \tau_{d_1 - 1} H^{j_1}, \coprod_{S_1}, H_a \rangle \langle H^a, \coprod_{S_2}, \tau_{d_2} H^{j_2}, \tau_{d_3} H_r \rangle$$

и

$$\langle \coprod_{\{1,\dots,n\}}, \tau_{d_1} H^{j_1}, \tau_{d_2} H^{j_2}, \tau_{d_3} H_r \rangle = \sum \langle \coprod_{S_1}, \tau_{d_1} H^{j_1}, \tau_{d_2} H^{j_2}, H_a \rangle \langle H^a, \coprod_{S_2}, \tau_{d_3 - 1} H_r \rangle,$$

где сумма берется по всем разбиениям $S_1 \sqcup S_2 = \{1, \ldots, n\}$ и по всем $a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, таким что степени символов, входящих в выражение, неотрицательны (заметим, что сумма конечна).

Оказывается, GW имеет удобный мультипликативный базис. Рассмотрим кольцо $A = \mathbb{C}[a_{ij}]$, $0 \leqslant i \leqslant j$, $j > 0$ и отображение $r\colon A \to GW$, задающееся через $a_{ij} \mapsto \langle H, H^j, H_i \rangle$.

Теорема 2.56 (**абстрактная теорема восстановления**). *Отображение* $r\colon \mathbb{C}[a_{ij}] \to GW$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Формальным следствием соотношений типа GW5 является следующее соотношение.

GW6: Для любого конечного множества $S \subset \mathbb{N}$ обозначим $H^{i_{s_4}}, \ldots, H^{i_{s_k}}$, где s_j — различные элементы S, через $\coprod_S$. Тогда для любого $n \geqslant 0$

$$\sum \langle \coprod_{S_1}, H^{i_1}, H^{i_2}, H_a \rangle \langle H^a, \coprod_{S_2}, H^{i_3}, H_r \rangle = \sum \langle \coprod_{T_1}, H^{i_1}, H^{i_3}, H_b \rangle \langle H^b, \coprod_{T_2}, H^{i_2}, H_r \rangle,$$

где суммы берутся по всем разбиениям $S_1 \sqcup S_2 = \{4, \ldots, n\}$, $T_1 \sqcup T_2 = \{4, \ldots, n\}$ и всем a и b, таким что степени символов, входящих в выражение, неотрицательны (заметим, что обе суммы конечны).

В геометрическом случае оно называется квадратичным соотношением, (см. [KM94], 3.2.2); если множество S пусто, то такое соотношение называется уравнением ассоциативности, или WDVV уравнением. Несмотря на то, что соотношения такого типа следуют из соотношений типа GW5, для удобства мы будем включать их в образующие идеала соотношений в кольце GW.

Доказательство эпиморфности r является абстрактной версией доказательства из [KM94]. Для простоты $r(a_{ij})$ обозначим также через a_{ij}. Необходимо доказать, что любой "инвариант" $\langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_n} H_r \rangle$ можно выразить через a_{ij}.

Применяя соотношение GW4 к одно- и двухточечным инвариантам (абстрактным символам), можно полагать $n \geqslant 3$ (см. доказательство предложения 3.16). Используя соотношения GW5 (и GW2), можно предполагать, что все числа d_i равны нулю.

Для инварианта $C = \langle H^{i_1+1}, \dots, H^{i_n}, H_r \rangle$, $n \geq 2$, $i_1 > 1$, рассмотрим соотношения GW6 для классов $H, H^{i_1}, \dots, H^{i_n}, H_r$. Легко видеть, что, по модулю инвариантов с меньшим количеством членов и соотношений типа GW2 и GW4, C равно сумме инвариантов для элементов $H^{i_1}, \dots, H^{i_n}, H_r$. Итак, используя соотношения GW1–GW6, любой инвариант можно выразить через трехточечные инварианты с H^1 в качестве первого элемента, то есть в терминах a_{ij}. Таким образом, r является эпиморфизмом.

Докажем, что r — мономорфизм, по шагам.

Шаг 1. Пусть GW3$_p$ и GW4$_p$ — соотношения типа GW3 и GW4 для инвариантов без потомков. Тогда идеал Rel порожден соотношениями типа GW1, GW2, GW3$_p$, GW4$_p$, GW5, GW6 (соотношения "коммутируют"). Заметим, что соотношения типа GW3$_p$ являются частным случаем соотношений типа GW2.

Шаг 2. Пусть

$$GW' = \mathbb{C}[F']/(\mathrm{GW4_p}, \mathrm{GW5}, \mathrm{GW6}),$$

где $F' \subset F$ — инварианты положительной степени типа

$$\langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \ldots, \tau_{d_{n-1}} H^{i_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle,$$

с $i_k \geqslant i_l$ для $k > l$ и $d_k \geqslant d_l$, если $i_k = i_l$. (Таким образом, левая сторона любого соотношений типа GW2 становится просто обозначением для числа в правой части.) Очевидно, $GW' \cong GW$.

Шаг 3. Пусть $A_p = \mathbb{C}[F'_p]/(\mathrm{GW4_p}, \mathrm{GW6})$, где $F'_p \subset F'$ — подмножество инвариантов без потомков. Покажем, что естественное отображение $A_p \to GW'$ является мономорфизмом. Рассмотрим порядок на инвариантах, то есть функцию w на F'_p, задающуюся через

$$w(\langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \ldots, \tau_{d_{n-1}} H^{i_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle) = (\sum d_j, d_1, i_1, \ldots, d_n, r).$$

Будем говорить, что $C_1 > C_2$, если $w(C_1) > w(C_2)$ (относительно естественного лексикографического порядка). Определим лексикографический порядок на мономах из F', то есть для любых двух мономов $M_1 = \alpha \cdot C_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot C_n^{a_n}, M_2 = \beta \cdot C_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot C_n^{b_n}$ (где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $C_1 > C_2 > \ldots > C_n$) положим $M_1 > M_2$, если $a_1 > b_1$, или $a_1 = b_1$ и $a_2 > b_2$ и т. д. Обозначим старший член $E \in \mathbb{C}[F']$ относительно этого порядка через $L(E)$. Обозначим соотношение типа GW5 с инвариантом C в левой части (определенное не единственным образом!) через $\mathrm{GW5}(C)$. Для примарного (то есть без потомков) инварианта C положим $\mathrm{GW5}(C) = C$. Рассмотрим элемент $P \neq 0$ в $\mathbb{C}[F'_p]$, такой что $r(P) \in (\mathrm{GW4_p}, \mathrm{GW5}, \mathrm{GW6}) \subset \mathbb{C}[F']$ для естественного отображения $r\colon \mathbb{C}[F'_p] \to \mathbb{C}[F']$. Для простоты обозначим $r(P)$ через P. Пусть $P = \sum_{j \in J} \beta_j \cdot \prod_{i \in I} C_i^{b_{i,j}} \mathrm{GW5}(C_j)$ по модулю

$(\mathrm{GW4}_p, \mathrm{GW6})$, где $\beta_j \in \mathbb{C}$. Применяя, если надо, соотношения типа GW4, можно считать, что инварианты C_i содержат как минимум три "элемента" внутри угловых скобок, то есть к ним применимо соотношение типа GW5. Обозначим максимальный старший член для всех слагаемых вида $\prod_{i\in I} C_i^{b_{i,j}} \mathrm{GW5}(C_j)$ через L. Пусть $J_0 \subset J$ — подмножество индексов, таких что $L(\prod_{i\in I} C_i^{b_{i,j}} \mathrm{GW5}(C_j)) = L$ для $j \in J_0$. Пусть L имеет множитель с потомками. Тогда

$$P = \sum_{j\in J_0} \beta_j \cdot \prod_{i\in I} C_i^{b_{i,j}} \mathrm{GW5}(C_j) + (\text{слагаемые с меньшими старшими членами}).$$

Очевидно, $L(\mathrm{GW5}(C)) = C$. Можно проверить, что разность двух выражений типа $\mathrm{GW5}(C)$ выражается через соотношения типа GW5 с меньшим старшим членом и соотношения типа GW6. Таким образом, по модулю слагаемых с меньшими старшими членами, выражения типа $\mathrm{GW5}(C_i)$ в сумме в правой части равенства совпадают для каждого i. Итак,

$$P = \sum_{j\in J_0} \beta_j \cdot \prod_{i\in I} \mathrm{GW5}(C_i)^{b_{i,j}} \mathrm{GW5}(C_j) +$$

$$(\text{слагаемые с меньшими старшими членами}) =$$

$$\sum_{j\in J_0} \beta_j \cdot \left(\prod_{i\in I\cup J_0} \mathrm{GW5}(C_i)^{c_i} \right) + (\text{слагаемые с меньшими старшими членами}).$$

Так как $L(P) < L$, то $\sum_{j\in J_0} \beta_j = 0$. Мы получили выражение для P с меньшим старшим членом L. Повторяя эту процедуру, можно добиться выражения для P с $L(P) = L$, то есть без соотношений типа GW5. Таким образом, $P \in (\mathrm{GW4}_p, GW6)$ и $A_p \cong GW' \cong GW$, то есть любой инвариант единственным образом выражается через примарные.

Шаг 4. Докажем, что примарный инвариант единственным образом выражается через образующие типа a_{ij}. Инварианты вида

$\langle H^k, H^1, \ldots, H^1, H_r\rangle$ мы будем называть тривиальными, так как соотношения вида GW6 для них тривиальны. Пусть $F_t \subset F'_p$ — подмножество тривиальных инвариантов. Очевидно, $A \cong A_t = \mathbb{C}[F_t]/(\mathrm{GW4_p}) \cong \mathbb{C}[F_t]/(\mathrm{GW4_p}, \mathrm{GW6})$. Пусть $F'_t \subset F'_p$ — подмножество инвариантов, не содержащих элементы вида H^1 и $\mathrm{GW6}'$ — соотношения типа GW6, в которых инварианты, содержащие H^1, заменены на инварианты без таких элементов, полученные с помощью $\mathrm{GW4}_p$. Покажем, что $A_t \cong \mathbb{C}[F'_t]/(\mathrm{GW6}') \cong A_p$.

Определим функцию w', на элементах множества F'_t, задающуюся через

$$w'(\langle H^{i_1}, \ldots, H^{i_{n-1}}, H_r\rangle) = (n, i_1, \ldots, i_{n-1}, r).$$

Определим порядок на мономах из F' и старший член $L'(E)$ любого $E \in \mathbb{C}[F'_p]$ так же, как и раньше. Прямые вычисления показывают, что разность двух соотношений типа $\mathrm{GW6}'$ с одинаковыми старшими членами может быть выражена в терминах соотношений типа $\mathrm{GW6}'$ с меньшими старшими членами ("соотношения типа GW6 коммутируют"). Предположим, что $P = P(a_{ij}) \in (\mathrm{GW6}') \subset \mathbb{C}[F'_t]$. Как и раньше, можно найти выражение для P в терминах соотношений типа $\mathrm{GW6}'$, содержащих только тривиальные инварианты. Так как эти соотношения равны нулю, то $P = 0$ и $A \cong A_p \cong GW$. $\square$

Замечание 2.57. Таким образом, теория Громова–Виттена квантово минимального многообразия Фано X размерности N — это конкретная функция из $GW_N = r(i_N(A_N))$ в $\mathbb{C}$, где $i_N\colon A_N \to GW$ задается через $i_N(a_{ij}) = a_{ij}$ если $(i,j) \neq (0,0)$ и $i_N(a_{00}) = 0$.

Теорема 2.56 позволяет определить универсальный I-ряд $I \in A \otimes$

$\mathbb{C}[[t]][[h]]$, такой что для любого N абстрактный I-ряд для размерности N

$$I^N=\sum_{i,j}\langle\tau_i H_j\rangle\cdot t^d h^j\in GW_N\otimes\mathbb{C}[[t]][h]/h^{N+1}$$

является ограничением ряда I, то есть $I^N=r_N(I \bmod h^{N+1})$. Аналогично, можно определить универсальный "регуляризованный I-ряд" $\widetilde{I}$, такой что для ряда

$$\widetilde{I}^N=\sum_{i,j}\langle\tau_i H_j\rangle\cdot t^d h^j\cdot(h+1)\cdot\ldots\cdot(h+d)\in GW_N\otimes\mathbb{C}[[t]][h]/h^{N+1}$$

выполнено $\widetilde{I}^N=r_N(\widetilde{I} \bmod h^{N+1})$.

Рассмотрим тор $\mathbb{T}=\mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ и тривиальное векторное расслоение HQ^N со слоем $GW_N\otimes\langle H^0,H^1,\ldots,H^N\rangle$ (символы H^i являются обозначениями для векторов базиса). Пусть $h^i=1\otimes H^i$. Положим

$$A^N=\begin{pmatrix} a_{0,0}t & a_{0,1}t^2 & \ldots & a_{0,N-1}t^N & a_{0,N}t^{N+1}\\ 1 & a_{1,1}t & \ldots & a_{1,N-1}t^{N-1} & a_{1,N}t^N\\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{N,N}t\end{pmatrix}$$

(где $a_{00}=0$). Определим *абстрактную квантовую связность* ∇^N через

$$\left(\nabla^N(h^i),t\frac{d}{dt}\right)=A^N h^i$$

(связность коммутирует с a_{ij}). Повторим все предыдущие рассуждения в абстрактном случае. В частности, определим *абстрактный квантовый дифференциальный оператор* $L_N^Q\in GW_N\otimes\mathcal{D}$ и оператор $L_N\in GW_N\otimes\mathcal{D}$ (напомним, что после специализации абстрактных инвариантов Громова–Виттена к геометрическим такой оператор называется геометрическим оператором типа DN). Тогда верна следующая теорема.

Теорема 2.58.

1) *Ряд* I^N *является обобщенным решением уравнения* $L_N^Q I = 0$.

2) *Ряд* $\widetilde{I}^N \mathrm{mod}\ h^N$ *является обобщенным решением уравнения* $L_N I = 0$.

Другими словами, положив в ряде $\widetilde{I}^N$ (соответственно в операторе L_N) $a_{ij} = 0$ для $N_0 < i, j \leq N$, мы получим ряд $\widetilde{I}^{N_0}$ (соответственно оператор $D^{N-N_0} L_{N_0}$).

Замечание 2.59. То же самое выполнено и для операторов типа DN. Напомним, что оператор типа DN — это оператор L_N с отождествленными a_{ij} и $a_{N-j,N-i}$. Пусть J^N — обобщенное решение такого оператора. Если $n \ll N$ и $N < N_0$, то

$$J^N \bmod (t^n) = J^{N_0} \bmod (t^n, h^N).$$

Замечание 2.60. Определим операторы L_N^Q и L_N как операторы в $\mathbb{C}[a_{ij}]$, $0 \leqslant i \leqslant j$ (то есть с произвольным a_{00}). Тогда универсальность выполнена и для таких операторов. Универсальным рядом для оператора L_N^Q является ряд $e^{a_{00}t} \cdot I'$, где I' — ряд, получающийся из I с помощью сдвига $a_{ii} \mapsto a_{ii} - a_{00}$, а универсальным рядом для L_N является регуляризация ряда $e^{a_{00}t} \cdot I'$.

Глава 3

Гипотеза Голышева

Рассмотрим гладкое трехмерное многообразие Фано V с группой Пикара $\mathbb{Z}$ (такие многообразия были классифицированы Исковских в работах [Is77] и [Is78]). Гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа для таких многообразий сводится к следующей гипотезе, выдвинутой Голышевым.

Определение 3.1 ([Go02], 1.7, 1.10). *Считающей матрицей* многообразия V называется матрица $A \in \mathrm{Mat}(4 \times 4)$ вида

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{33} \end{bmatrix},$$

нумерация столбцов и строк которой начинается с нуля, а элементы задаются следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{\langle (-K_V)^{3-i}, (-K_V)^j, -K_V \rangle_{j-i+1}}{\deg V} = \frac{j-i+1}{\deg V} \cdot \langle (-K_V)^{3-i}, (-K_V)^j \rangle_{j-i+1}$$

(степень антиканоническая).

Легко видеть, что матрица A симметрична относительно побочной диагонали: $a_{ij} = a_{3-j,3-i}$. По определению, $a_{ij} = 0$ при $j - i + 1 < 0$. Если $j-i+1 = 0$, то $a_{ij} = 1$, так как $\langle(-K_V)^{3-i}, (-K_V)^j, -K_V\rangle_{j-i+1}$ в этом случае — просто число точек пересечения $(-K_V)^{3-i}$, $(-K_V)^j$ и $-K_V$, которое, очевидно, равно $\deg V$; $a_{00} = a_{33} = 0$. Остальные коэффициенты a_{ij} — это "ожидаемые" числа рациональных кривых степени $j - i + 1$, пересекающих $(-K_V)^{3-i}$ и $(-K_V)^j$, умноженные на $\frac{j-i+1}{\deg V}$, за одним исключением. А именно, по аксиоме дивизора

$$a_{01} = 2d \cdot (\textit{число коник, проходящих через общую точку}),$$

где d — индекс многообразия V.

Рассмотрим одномерный тор $\mathbb{G}_m = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ и дифференциальный оператор $D = t\frac{\partial}{\partial t}$ на нем. Рассмотрим матрицу M, положив ее элементы равными

$$m_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{если } k > l + 1, \\ 1, & \text{если } k = l + 1, \\ a_{kl} \cdot (Dt)^{l-k+1}, & \text{если } k < l + 1. \end{cases}$$

Рассмотрим семейство дифференциальных операторов

$$\widetilde{L}_V^{\lambda} = \det\nolimits_{\mathrm{right}}(D(E - \lambda t) - M),$$

$\lambda \in \mathbb{C}$, где E — единичная матрица. Разделив $\widetilde{L}_V^{\lambda}$ слева на D, получим семейство операторов L_V^{λ}, то есть $\widetilde{L}_V^{\lambda} = DL_V^{\lambda}$.

Пусть d — индекс многообразия Фано V, $n = (-K_V)^3$, $N = \frac{n}{2d^2}$. Пусть $X_0(N)^W$ — фактор модулярной кривой $X_0(N)$ по инволюции Аткина–Ленера (то есть инволюции $z \to -\frac{1}{Nz}$, где z — координата на верхней полуплоскости). Рассмотрим локальную координату $q = e^{2\pi iz}$ на $X_0(N)^W$ в окрестности каспидальной точки $(i\infty)$. Заметим, что для тех чисел N, которые соответствуют рассматриваемым нами многообразиям Фано, кривые $X_0(N)^W$ рациональны. Рассмотрим (глобальную) координату T (обратную к униформизующей Конвея–Нортона) с центром в образе каспа $(i\infty)$, локально ведущую себя как q, то есть в окрестности образа каспа разлагающуюся как $T(q) = q + q^2 \cdot F(q)$, где F — ряд по q.

Гипотеза 3.2 (Голышев). *Для любого гладкого трехмерного многообразия Фано V с группой Пикара $\mathbb{Z}$ существует число $\alpha_V \in \mathbb{C}$, такое, что функция*

$$\Phi = (q^{\frac{1}{24}} \prod (1-q^n) q^{\frac{N}{24}} \prod (1-q^{Nn}))^2 \cdot T^{-\frac{N+1}{12}}$$

является решением уравнения $L_V^{\alpha_V}\Phi = 0$ относительно переменной $t = T^{\frac{1}{d}}$.

Основываясь на этой гипотезе, Голышев предсказал считающие матрицы для всех 17 семейств многообразий Фано.

1: Для проективного пространства $\mathbb{P}^3$

$$M(\mathbb{P}^3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 256 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $\alpha_{\mathbb{P}^3}$ равен 0.

2: Для квадрики в $\mathbb{P}^4$

$$M(X_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 54 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 54 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг α_{X_2} равен 0.

3: Для кубики в $\mathbb{P}^4$

$$M(X_3) = \begin{bmatrix} 0 & 24 & 0 & 576 \\ 1 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг α_{X_3} равен 0.

4: Для пересечения двух квадрик в $\mathbb{P}^5$

$$M(X_{2\cdot 2}) = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 0 & 256 \\ 1 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $\alpha_{X_{2\cdot 2}}$ равен 0.

5: Для квартики (общего многообразия Фано рода 3) в $\mathbb{P}^4$

$$M(X_4) = \begin{bmatrix} 0 & 3888 & 504576 & 18323712 \\ 1 & 80 & 13600 & 504576 \\ 0 & 1 & 80 & 3888 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг α_{X_4} равен 24.

6: Для пересечения квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$

$$M(X_{2\cdot 3}) = \begin{bmatrix} 0 & 792 & 43632 & 793152 \\ 1 & 30 & 2340 & 43632 \\ 0 & 1 & 30 & 792 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $\alpha_{X_{2\cdot 3}}$ равен 12.

7: Для пересечения трех квадрик в $\mathbb{P}^6$

$$M(X_{2\cdot 2\cdot 2}) = \begin{bmatrix} 0 & 304 & 9984 & 121088 \\ 1 & 16 & 800 & 9984 \\ 0 & 1 & 16 & 304 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $\alpha_{X_{2\cdot 2\cdot 2}}$ равен 8.

8: Для многообразия V_5

$$M(V_5) = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & 160 \\ 1 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг α_{V_5} равен 0.

9: Для многообразия V_1 (двойного накрытия конуса над поверхностью Веронезе с ветвлением в гладкой кубике)

$$M(V_1) = \begin{bmatrix} 0 & 240 & 0 & 57600 \\ 1 & 0 & 1248 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 240 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг α_{V_1} равен 0.

10: Для многообразия V_2 (двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гладкой квартике)

$$M(V_2) = \begin{bmatrix} 0 & 48 & 0 & 2304 \\ 1 & 0 & 160 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг α_{V_2} равен 0.

11: Для многообразия V_2' (двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гладкой секстике)

$$M(V_2') = \begin{bmatrix} 0 & 137520 & 119681240 & 21690374400 \\ 1 & 624 & 650016 & 119681240 \\ 0 & 1 & 624 & 137520 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $\alpha_{V_2'}$ равен 120.

12: Для общего многообразия V_{10}

$$M(V_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 156 & 3600 & 33120 \\ 1 & 10 & 380 & 3600 \\ 0 & 1 & 10 & 156 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $\alpha_{V_{10}}$ равен 6.

13: Для многообразия V_{12}

$$M(V_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 96 & 1692 & 12816 \\ 1 & 7 & 216 & 1692 \\ 0 & 1 & 7 & 96 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $\alpha_{V_{10}}$ равен 5.

14: Для многообразия V_{14}

$$M(V_{14}) = \begin{bmatrix} 0 & 64 & 924 & 5936 \\ 1 & 5 & 140 & 924 \\ 0 & 1 & 5 & 64 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $\alpha_{V_{14}}$ равен 4.

15: Для многообразия V_{16}

$$M(V_{16}) = \begin{bmatrix} 0 & 48 & 576 & 3328 \\ 1 & 4 & 96 & 576 \\ 0 & 1 & 4 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $\alpha_{V_{16}}$ равен 4.

16: Для многообразия V_{18}

$$M(V_{18}) = \begin{bmatrix} 0 & 36 & 378 & 1944 \\ 1 & 3 & 72 & 378 \\ 0 & 1 & 3 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $\alpha_{V_{18}}$ равен 3.

17: Для многообразия V_{22}

$$M(V_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & 24 & 198 & 880 \\ 1 & 2 & 44 & 198 \\ 0 & 1 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $\alpha_{V_{22}}$ равен 12/5.

Доказательство гипотезы Голышева сводится к проверке того, что вышеперечисленные матрицы действительно являются считающими матрицами. Иными словами, для доказательства необходимо найти двухточечные инварианты всех многообразий. I-ряды для полных пересечений в проективных пространствах (а, значит, и их считающие матрицы) найдены Гивенталем в [Gi96]. Считающая матрица многообразия V_5 найдена Бовилем в [Bea95]; для многообразия V_{22} матрица найдена Кузнецовым (она приведена в [BaMa01]). В теореме 3.21 с помощью описания квантовых когомологий грассманианов и их гиперплоских сечений найдены считающие матрицы многообразий V_{10} (сечения аффинного грассманиана $G(2,5)$ линейным подпространством коразмерности 2 и квадрикой в плюккеровом вложении) и V_{14} (сечения аффинного грассманиана G(2,6) линейным подпространством коразмерности 5 плюккеровом вложении). Аналогичным образом (с помощью теоремы 2.20) Голышевым найдены считающие матрицы многообразий V_{12} (сечения ортогонального грассманиана $OG(5,10) \subset \mathbb{P}^{15}$ линейным пространством коразмерности 7), V_{16} (сечения лагранжева грассманиана $LG(3,6)$ линейным пространством коразмерности 3) и V_{18} (сечения грассманиана группы G_2 линейным пространством коразмерности 3). Наконец, в теореме 3.22 найдены считающие матрицы многообразий V_1, V_2 и V_2'. Эти многообразия представляются как полные пересечения во взвешенных проективных пространствах. Для того, чтобы найти их I-ряды, мы обобщаем теорему 2.21 на случай гладких полных пересечений в особых торических многообразиях (теорема 3.12).

Таким образом, теоремы 3.21 и 3.22 завершают доказательство гипотезы Голышева.

3.1 Инварианты Громова–Виттена полных пересечений в особых торических многообразиях

Для начала напомним определения и обозначения торической геометрии (более подробно см. в [Da78] или в [Fu93]).

Определение 3.3. *Торическим многообразием* называется неприводимое многообразие X, содержащее n-мерный тор $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}^*)^n$ в качестве открытого по Зарискому множества, такое что действие $(\mathbb{C}^*)^n$ на себе умножением продолжается до действия на X.

Определение 3.4. *Рациональным полиэдральным конусом* $\sigma \in \mathbb{R}^n$ называется конус, порожденный конечным числом векторов решетки $\mathbb{Z}^n$:

$$\sigma = \{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0\},$$

где $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}^n$.

Конус называется *симплициальным*, если он порожден частью векторов базиса в $\mathbb{R}^n$.

Конус σ называется *строго выпуклым*, если $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

Размерностью конуса называется размерность его линейной оболочки.

Гранью конуса называется пересечение $\{l = 0\} \cap \sigma$, где l — линейная функция, неотрицательная на σ. Одномерные грани называются *ребрами*. Ребро порождается *примитивным элементом* — вектором его пересечения с решеткой $\mathbb{Z}^n$ наименьшей длины.

Определение 3.5. *Двойственным конусом* рационального полиэдрального строго выпуклого конуса называется конус $\sigma^\vee \subset (\mathbb{R}^n)^*$, задаваемый как

$$\sigma^\vee = \{m | \langle m, v\rangle \geqslant 0, v \in \sigma\},$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — естественное невырожденное спаривание $(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Конус $\sigma^\vee$ является рациональным полиэдральным и имеет размерность n.

Определение 3.6. Рассмотрим множество $M = \sigma^\vee \cap (\mathbb{Z}^n)^*$. По лемме Гордана, эта подгруппа конечно порождена элементами $m_1, \ldots, m_l \in M$, так что любой элемент $a \in M$ раскладывается как

$$a = a_1 m_1 + \ldots + a_l m_l,\ a_i \in \mathbb{Z},\ a_i \geqslant 0.$$

Рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^l$, определенное как

$$(t_1, \ldots, t_n) \to (t^{m_1}, \ldots, t^{m_l}),$$

где $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot t_n^{\alpha_n}$. *Аффинным торическим многообразием* U_σ, соответствующим конусу σ, называется замыкание образа φ. При этом кольцо $\mathbb{C}[M]$ является координатным кольцом U_σ, а само U_σ нормально.

Определение 3.7. *Веером* называется конечный набор Σ конусов в $\mathbb{R}^n$, такой что

- Каждый конус является строго выпуклым рациональным полиэдральным конусом.

- Грань каждого конуса принадлежит Σ.

- Если $\sigma, \tau \in \Sigma$, то $\sigma \cap \tau$ — грань σ и τ.

Веер называется *симплициальным*, если каждый входящий в него конус симплициален.

Размерностью веера называется размерность его линейной оболочки.

Гранью веера называется грань входящего в него конуса. Одномерные грани называются *ребрами*. Ребро порождается *примитивным элементом* — вектором его пересечения с решеткой $\mathbb{Z}^n$ наименьшей длинны.

Определение 3.8. *Торическим многообразием, соответствующим* Σ, называется многообразие X_Σ, полученное путем склейки U_σ и U_τ вдоль их общего открытого множества $U_{\sigma\cap\tau}$ для всех $\sigma, \tau \in \Sigma$.

X_Σ является нормальным торическим многообразием; более того, все нормальные торические многообразия получаются из некоторого веера таким путем.

Как легко видеть, k-мерным конусам веера соответствуют подмногообразия коразмерности k. Так, ребрам веера соответствуют дивизоры.

Замечание 3.9. X_Σ определяется как абстрактное многообразие; оно не обязательно аффинно или проективно. Однако, если не оговорено противное, мы будем рассматривать *проективные* веера, соответствующие проективным многообразиям (иными словами, веера, для которых существует строго выпуклая функция, линейная на конусах веера).

Каждому вееру можно сопоставить *многогранник* — объединение выпуклых оболочек примитивных векторов в каждом конусе. И наоборот, каждому выпуклому многограннику с целочисленными вершинами, содержащими точку 0, можно сопоставить *нормальный веер* — набор конусов над гранями многогранника. Таким образом, каждому выпуклому многограннику можно сопоставить торическое многообразие, построенное по нормальному вееру для двойственного многогранника. Если двойственный многогранник имеет целочисленные координаты, то он называется *рефлексивным*, а соответствующее многообразие является многообразием Фано с горенштейновыми каноническими особенностями.

Каждому конусу веера $\sigma \subset N = \mathbb{R}^n$ размерности r можно сопоставить орбиту тора размерности $n - r$ (здесь n — размерность торического многообразия). Так, каждому ребру веера (одномерному конусу) можно сопоставить (эквивариантный) дивизор Вейля.

Дивизоры, соответствующие ребрам веера, порождают группу классов дивизоров. Дивизор Вейля $D = \sum d_i D_i$, где D_i — дивизоры, соответствующие ребрам веера, является дивизором Картье, если для каждого конуса этого веера σ существует вектор n_σ, такой что $\langle n_\sigma, m_i \rangle = d_i$, где m_i — примитивные элементы ребер конуса. Если такой вектор один для всех конусов, то дивизор является главным. Отсюда, если торическое многообразие n-мерно, а количество ребер его веера равно k, то ранг его группы классов дивизоров равен $n - k$.

Определение 3.10. Многообразие X называется $\mathbb{Q}$-*факториальным*, если $\mathrm{Cl}\,(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathrm{Pic}\,(X) \otimes \mathbb{Q}$ (где $\mathrm{Cl}\,(X)$ — группа классов дивизоров Вейля на X). Оно называется $\mathbb{Q}$-*горенштейновым*, если $mK_X \in \mathrm{Pic}\,(X)$ для некоторого числя $m \in \mathbb{N}$; если $K_X \in \mathrm{Pic}\,(X)$, то оно называется горенштейновым. Говорят, что $\mathbb{Q}$-горенштейново многообразие X имеет *канонические особенности*, если для любого разрешения $f\colon X' \to X$ относительный канонический $\mathbb{Q}$-дивизор $K_{X'} - f^*(K_X)$ эффективен.

Таким образом, на $\mathbb{Q}$-факториальном многообразии естественным образом можно построить теорию пересечений для дивизоров Вейля. Торическое многообразие является $\mathbb{Q}$-факториальным тогда и только тогда, когда любой конус соответствующего ему веера симплициален. В этом случае его группа Пикара порождена над $\mathbb{Q}$ дивизорами, соответствующими ребрам веера.

Пусть $\Sigma \subset N = \mathbb{Z}^n$ — веер, $P = P_\Sigma \subset N_\mathbb{R} = N \otimes \mathbb{R}$ — соответствующий многогранник, а $P^\vee \subset M_\mathbb{Q} = N^\vee \otimes \mathbb{Q}$ — двойственный многогранник. Пусть X_Σ — торическое многообразие, соответствующее Σ. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты на торе $\mathbb{T}$, замыканием которого является X_Σ. Обозначим $x^m = x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}$ для $m = (m_1, \ldots, m_n) \in M$. Любая функция f на $\mathbb{T}$ может быть единственным образом представлена как $f = \sum_{m \in M} a_m x^m$. Обозначим $\mathrm{Supp}\,(f) = \{m \in M, a_m \neq 0\}$. Выпуклая оболочка $\mathrm{Supp}\,(f)$ в $M_\mathbb{R} = M \otimes \mathbb{R}$ называется *многогранником Ньютона* многочлена f. Антиканоническим дивизором X_Σ является сумма граничных дивизоров $D_1, \ldots, D_r$, соответствующих примитивным лучам веера $n_1, \ldots, n_r$. Точка $m \in M$ соответствует рациональной функции на X_Σ. Ее дивизором является дивизор $\sum \langle m, n_i \rangle D_i$. В дальнейшем будем рассматривать $\mathbb{Q}$-дивизоры. Элемент решетки $M_\mathbb{Q}$ определяет по линейности $\mathbb{Q}$-дивизор. В частности, многогранник Ньютона $\Delta \in M$ функции f лежит в $P^\vee$ тогда и только тогда, когда дивизор $\mathrm{div}\,(f) - K_{X_\Sigma} \in \mathrm{Pic}\,(X_\Sigma) \otimes \mathbb{Q}$ эффективен (где $\mathrm{div}\,(f)$ —

дивизор функции f). Таким образом, функции, многогранники Ньютона которых лежат в $P^\vee$, являются сечениями антиканонического пучка, так что линейное пространство $L(P^\vee)$ естественно изоморфно $|-K_{X_\Sigma}|$, где $L(P^\vee)$ — пространство многочленов Лорана с носителем в $P^\vee$.

Пусть $P \subset N_\mathbb{R} \cong \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{R}$ — многогранник, а X — торическое многообразие, построенное по нормальному вееру многогранника P. Тогда X имеет канонические особенности тогда и только тогда, когда единственной внутренней точкой многогранника P является ноль. Антиканонической степенью многообразия X (то есть $(-K_X)^n$) является объем двойственного многогранника $P^\vee$, деленный на $n!$. Размерностью антиканонической линейной системы является число целочисленных точек внутри $P^\vee$ и на его границе. Число Пикара многообразия X равно размерности пространства функций на $N_\mathbb{R}$, линейных на всех конусах над гранями P, по модулю линейных функций.

Рассмотрим взвешенное проективное пространство $\mathbb{P} = \mathbb{P}(w_0, \ldots, w_l)$. Соответствующий ему веер порождается целочисленными векторами $m_0, \ldots, m_l \in \mathbb{R}^l$, такими что $\sum w_i m_i = 0$. Если $w_0 = 1$, то можно взять $m_0 = (-w_1, \ldots, -w_l)$, $m_i = e_i$, где e_i — базис в $\mathbb{R}^l$. При этом набор векторов $\{m_i\}$ соответствует набору стандартных дивизоров–стратов $\{D_i \in |w_i H|\}$.

Торическое многообразие является *гладким*, если для каждого конуса σ соответствующего ему веера полугруппа $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ порождается частью базиса решетки $m_1^\sigma, \ldots, m_k^\sigma$. При этом добавлению ребра $a = a_1 m_1^\sigma + \ldots + a_k m_k^\sigma$, $a_i \in \mathbb{Q}$, к конусу (и соединению его гранями с “соседними” ребрами) соответствует взвешенное раздутие вдоль подмногообразия, соответствующего σ, с весами $1/r \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, где $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ и $a_i = \alpha_i / r$. Добавляя таким образом к вееру ребра, в конце концов можно торически разрешить особенности торического многообразия.

Таким образом, особым множеством взвешенного проективного пространства $\mathbb{P} = \mathbb{P}(w_0, \ldots, w_l)$ является объединение стратов, задающихся уравнениями вида $x_{i_1} = \ldots = x_{i_j} = 0$, где x_{i_j} — координата веса w_{i_j}, а $\{i_1, \ldots, i_j\}$ — такое максимальное по включению множество индексов, что наибольший общий делитель остальных больше единицы.

Докажем теперь теоремы, непосредственно обобщающие теорему Гивенталя об I-рядах полных пересечений в гладких торических многообразиях. Напомним обозначения: для любого ряда $I \in H^*_H(X) \otimes \mathbb{C}[[t]]$

$$I = \sum I_{H^i} H^i = \sum I_{d,H^i} t^d H^i.$$

Теорема 3.11. *Пусть $\mathbb{P} = \mathbb{P}(w_1, \ldots, w_k)$ — взвешенное проективное пространство. Рассмотрим гладкое полное пересечение X гиперповерхностей $X_1, \ldots, X_l$, не пересекающее особое множество $\mathbb{P}$. Пусть $-K_X$ обилен, $\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}L$, где L — класс, двойственный гиперплоскости, а $i\colon X \to \mathbb{P}$ — естественное вложение.*

1) *I-ряд для X имеет вид*

$$I^X = e^{-\alpha_X t} \sum_{d=0}^{\infty} t^d \cdot i^* \left(\frac{\prod_{a=1}^{l} (X_a + 1)_{\boldsymbol{d \cdot \deg X_a}}}{\prod_{a=1}^{k} (w_a L + 1)_{\boldsymbol{d \cdot w_a}}} \right),$$

где $\alpha_X = 0$, если индекс многообразия не меньше 2, и $\alpha_X = \prod_{a=1}^{l} (\deg X_a)! / \prod_{a=1}^{k} w_a!$ в случае индекса 1.

2) *Пусть d_i $(1 \leqslant i \leqslant l)$ — степени гиперповерхностей X_i (относительно L), а $d_0 = \sum w_i - \sum d_i$ — индекс многообразия X. Пусть $\mathcal{I}^X(t) = \sum t^d \cdot ((d_0 d)! \cdot (e^{\alpha_X} I^X)_{d,H^0})$. Рассмотрим оператор (обобщающий* *оператор Римана–Роха, см.* [Go01])

$$\widetilde{L}_X = \prod_{i=1}^{k} \big(w_i D - (w_i - 1)\big)_{\boldsymbol{w_i}} - t \prod_{i=0}^{l} \big(d_i D + 1\big)_{\boldsymbol{d_i}}.$$

Тогда $\widetilde{L}_X(\mathcal{I}^X(t)) = 0$.

Теорема 3.12. *Пусть Y — $\mathbb{Q}$-факториальное торическое многообразие, а $Y_1, \ldots, Y_k$ — дивизоры, соответствующие ребрам веера Y. Рассмотрим гладкое полное пересечение X гиперповерхностей $X_1, \ldots, X_l$, не пересекающее особое множество Y. Пусть $-K_X$ обилен,* $\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}$, *а $i\colon X \to Y$ — естественное вложение. Пусть ℓ — численно эффективная образующая группы $H_2(Y)$, и для $\beta = d\ell$ положим $t^\beta = t^d$. Пусть $\Lambda \subset H_2(X)$ — полугруппа циклов алгебраических кривых на X.*

1) *I-ряд для X равен*

$$I^X = e^{-\alpha_X t} \sum_{\beta \in \Lambda} t^\beta \cdot i^* \left(\frac{\prod_{a=1}^{l} \big(X_a + 1\big)_{\boldsymbol{\beta \cdot X_a}}}{\prod_{a=1}^{k} \big(Y_a + 1\big)_{\boldsymbol{\beta \cdot Y_a}}} \right),$$

где $\alpha_X = 0$, если индекс многообразия не меньше 2, и $\alpha_X = \prod_{a=1}^{l} (\ell \cdot X_a)! / \prod_{a=1}^{k} (\ell \cdot Y_k)!$ в случае индекса 1.

2) *Пусть d_i $(1 \leqslant i \leqslant l)$ — степени гиперповерхностей X_i (относительно ℓ), w_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ — степени дивизоров, соответствующих ребрам веера Y, а d_0 — индекс многообразия X.Пусть $\mathcal{I}^X(t) = \sum t^d \cdot ((d_0 d)! \cdot (e^{\alpha_X} I^X)_{d, H^0})$. Рассмотрим оператор (обобщающий оператор Римана–Роха, см.* [Go01])

$$\widetilde{L}_X = \prod_{i=1}^{k} \big(w_i D - (w_i - 1)\big)_{\boldsymbol{w_i}} - t \prod_{i=0}^{l} \big(d_i D + 1\big)_{\boldsymbol{d_i}}.$$

Тогда $\widetilde{L}_X(\mathcal{I}^X(t)) = 0$.

Доказательство теорем 3.11 и 3.12. Дивизоры на $\mathbb{P}$, которые соответствуют ребрам его веера — это $w_1L, \dots, w_kL$. Таким образом, теорема 3.11 следует из теоремы 3.12.

Докажем теорему 3.12.

1) Пусть Σ — веер Y. Рассмотрим последовательность симплициальных вееров $\Sigma = \Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_r$, такую, что

i) Веер Σ_{i+1} получается из Σ_i добавлением ребра, лежащего внутри конуса, ребра которого не могут быть частью базиса целочисленной решетки, в которой лежит этот веер, и соединением его гранями с "соседними" ребрами (то есть заменой всех конусов, содержащих добавляемое ребро, на все линейные оболочки этого ребра и граней конуса, не содержащих его);

ii) Веер Σ_r соответствует гладкому многообразию.

Такую последовательность можно построить, например, следуя [Da78], 8.1–8.3.

В итоге мы получим торическое разрешение особенностей $f\colon \widetilde{Y} = X_{\Sigma_r} \to Y$, где X_{Σ_r} — многообразие, соответствующее вееру Σ_r. Исключительным множеством этого разрешения будет объединение дивизоров $E_1, \dots, E_r$, которые соответствуют добавляемым ребрам. Пусть $W_1, \dots, W_k$ — дивизоры на Y, соответствующие ребрам его веера, а $\widetilde{W}_1, \dots, \widetilde{W}_k$ — их собственные прообразы. Пусть $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_l$ — собственные прообразы дивизоров $X_1, \dots, X_l$, $\widetilde{X} = \widetilde{X}_1 \cap \ldots \cap \widetilde{X}_l$, а $j\colon \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ — естественное вложение. Ясно, что существует изоморфизм g, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & \widetilde{Y} \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативной, так как f — изоморфизм между $\widetilde{Y} \setminus (\cup_{i=1}^{r} E_i)$ и $Y \setminus \operatorname{Sing} Y$.

На торическом многообразии V, ассоциированном с полным симплициальным веером, каноническое отображение группы алгебраических циклов по модулю рациональной эквивалентности с рациональными коэффициентами в группу гомологий с рациональными коэффициентами

$$A_*(V)_{\mathbb{Q}} \to H_*(V, \mathbb{Q})$$

является изоморфизмом (см. [Da78], 10.9). Таким образом, теорию пересечений можно распространить на группу гомологий с рациональными коэффициентами.

Отображение $f_* \colon H_2(\widetilde{Y}, \mathbb{Q}) \to H_2(Y, \mathbb{Q})$ сюръективно. Пусть $\lambda \subset X \subset Y$ — эффективная кривая, такая, что $H_2(X) = \mathbb{Z}\lambda$, а $\widetilde{\lambda} = f^{-1}(\lambda)$. Обозначим $K = \ker f_*$. Тогда $H_2(\widetilde{Y}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\widetilde{\lambda} + K$.

Цикл любой кривой $\boldsymbol{\beta}$, лежащей на $\widetilde{X}$, равен $\beta_0 \cdot \widetilde{\lambda}$, где $\beta_0 \in \mathbb{Z}$ и $\beta_0 \geqslant 0$, так как представители элементов K лежат на исключительных дивизорах, не пересекающих $\widetilde{X}$. Таким образом, если $\widetilde{\Lambda}$ — полугруппа алгебраических кривых на $\widetilde{X}$, то $\widetilde{\Lambda} = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\widetilde{\lambda}$.

Так как кратность пересечения дивизора с кривой зависит только от окрестности кривой, а f — изоморфизм в окрестности $\widetilde{X}$, то $\widetilde{\lambda} \cdot \widetilde{X}_i = \lambda \cdot X_i$ и $\widetilde{\lambda} \cdot \widetilde{W}_i = \lambda \cdot W_i$. Таким образом, для любой кривой $\boldsymbol{\beta} = \beta_0 \cdot \widetilde{\lambda}$ на $\widetilde{X}$ имеем $\boldsymbol{\beta} \cdot \widetilde{W}_i = \beta_0 \cdot (\lambda \cdot W_i)$, $\boldsymbol{\beta} \cdot \widetilde{X}_i = \beta_0 \cdot (\lambda \cdot X_i)$ и $\boldsymbol{\beta} \cdot E_i = 0$.

Дивизоры, соответствующие ребрам веера $\widetilde{Y}$ — это

$\widetilde{W}_1, \ldots, \widetilde{W}_k, E_1, \ldots, E_r$. Однако в выражении для I-ряда для $\widetilde{X}$ из теоремы 2.21 множители, в которых участвуют дивизоры E_i, сократятся, так что их можно опустить. Рассмотрим кольца $H^*(X)[[t]]$ и $H^*(\widetilde{X})[[\widetilde{t}]]$ и изоморфизм между ними, переводящий t в $\widetilde{t}$ и действующий на коэффициенты как f^*. Пусть $j\colon \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ — естественное вложение. Тогда

$$I^{\widetilde{X}} = e^{\widetilde{h}(\widetilde{t})} \sum_{\beta=\beta_0\widetilde{\lambda}\in\widetilde{\Lambda}} \widetilde{t}^{\beta_0} \cdot j^* \left(\frac{\prod_{a=1}^{l} [\widetilde{X}_a]_{\boldsymbol{\beta\cdot\widetilde{X}_a+1}}}{\prod_{a=1}^{l} [\widetilde{X}_a]_{\mathbf{1}}} \frac{\prod_{a=1}^{k} [\widetilde{W}_a]_{\mathbf{1}}}{\prod_{a=1}^{k} [\widetilde{W}_a]_{\boldsymbol{\beta\cdot\widetilde{W}_a+1}}} \right) =$$

$$j^*f^* \left(e^{h(t)} \sum_{\beta_0\geqslant 0} t^{\beta_0} \cdot \prod_{a=1}^{l} \left(X_a+1\right)_{\boldsymbol{\beta_0\cdot\mathbf{deg}\,X_a}} \cdot \frac{1}{\prod_{a=1}^{k} \left(\widetilde{W}_a+1\right)_{\boldsymbol{\beta_0\cdot w_a}}} \right) =$$

$$g^* \left(e^{h(t)} \sum_{d=0}^{\infty} t^d \cdot i^* \left(\frac{\prod_{a=1}^{l} \left(X_a+1\right)_{\boldsymbol{d\cdot\mathbf{deg}\,X_a}}}{\prod_{a=1}^{k} \left(\widetilde{W}_a+1\right)_{\boldsymbol{d\cdot w_a}}} \right) \right),$$

где $\widetilde{h}(\widetilde{t})$ — многочлен из теоремы 2.21, а $h(t)$ — его прообраз. Второе равенство выполнено, так как в качестве представителей классов дивизоров (над $\mathbb{Q}$) в обеих его частях можно выбрать дивизоры, собственно пересекающиеся с X и их собственные прообразы (так как $\operatorname{Pic} Y = \mathbb{Z}$, то каждый эффективный дивизор на Y является обильным, а, значит, эквивалентным очень обильному, взятому с некоторым рациональным коэффициентом), а f при ограничении на $\widetilde{X}$ — изоморфизм, индуцирующий изоморфизм групп когомологий f^*, переводящий дивизоры в их собственные прообразы. Наконец, так как g^* — изоморфизм колец когомологий X и $\widetilde{X}$, то $I^{\widetilde{X}} = g^*(I^X)$.

Осталось найти $h(t)$. Если X имеет индекс не меньше 2, то кривых, пересекающихся с антиканоническим классом по 1, не существует, и $h(t) = 0$. Если индекс X равен 1, то такая кривая — это прямая ℓ (относительно антиканонического класса X), и $h(t) = -\alpha_X t$. Заметим, что на X через общую точку не проходит прямых, то есть $\langle H^{\dim X}\rangle_\ell = 0$. Это значит, что коэффициент $e^{-\alpha_X t}\cdot I_\ell^X$ при H^0 равен нулю, откуда

$$\alpha_X = \frac{\prod_{a=1}^{l}(\ell\cdot X_a)!}{\prod_{a=1}^{k}(\ell\cdot Y_k)!} = \frac{\prod_{a=1}^{l}(\deg X_a)!}{\prod_{a=1}^{k} w_a!}.$$

2) Как легко видеть,

$$\mathcal{I}^X(t)_{H^0} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=0}^{l}(d_i\cdot n)!}{\prod_{j=1}^{k}(w_j\cdot n)!}t^n.$$

Рассмотрим теперь решение уравнения $\widetilde{L}_X(\mathcal{J}^X(t)) = 0$ в виде ряда $\mathcal{J}^X = \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$. Ясно, что $D(t^n) = nt^n$. Поэтому

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\big(w_i D - (w_i-1)\big)_{\boldsymbol{w_i}}\right)(t^n) = \left(\prod_{i=1}^{k}\big(w_i n - (w_i-1)\big)_{\boldsymbol{w_i}}\right)\cdot t^n.$$

Аналогично,

$$\left(t\prod_{i=0}^{l}\big(d_i D + 1\big)_{\boldsymbol{d_i}}\right)(t^{n-1}) = \left(\prod_{i=0}^{l}\big(d_i(n-1)+1\big)_{\boldsymbol{d_i}}\right)\cdot t^n.$$

Подставляя $\mathcal{J}^X$ в дифференциальное уравнение и пользуясь полученными равенствами, мы получим рекурсивное выражение на коэффициенты a_n, а именно,

$$a_n = \frac{\prod_{i=0}^{l}\big(d_i(n-1)+1\big)_{\boldsymbol{d_i}}}{\prod_{i=1}^{k}\big(w_i n - (w_i-1)\big)_{\boldsymbol{w_i}}}\cdot a_{n-1}.$$

Полагая $a_0 = 1$, по индукции мы получим

$$a_n = \sum\frac{\prod_{i=0}^{l}(d_i\cdot n)!}{\prod_{j=1}^{k}(w_j\cdot n)!}t^n,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 3.13. Легко видеть, что оператор Римана–Роха делится слева на $D^{\dim Y - \dim X}$. Пусть $\widetilde{L}_X = D^{\dim Y-\dim X}L_X$. Тогда $L_X\mathcal{I}^X = 0$. Иными словами, L_X — это оператор типа DN для X (где $N = \dim X$).

Замечание 3.14. 1) По теореме Лефшеца (см. [Do82], теорема 3.2.4, (i) и замечание 3.2.6) условия теорем 3.11 и 3.12 выполняются для полных пересечений размерности три и больше, не пересекающих особое множество, если группа Пикара объемлющего многообразия равна $\mathbb{Z}$ (что автоматически выполнено в случае теоремы 3.11).

2) Достаточным, но не необходимым условием того, что полное пересечение $X = X_1 \cap \ldots \cap X_l$ общих гиперповерхностей степеней $d_1, \ldots, d_l$ во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P} = \mathbb{P}(w_1, \ldots w_k)$ не проходит через особое множество $\mathbb{P}$, является следующее.

Количество дивизоров Картье среди X_i превышает

размерность особого множества $\mathbb{P}$.

Численно это выражается как

(*число d_i, делящихся на каждое из a_i*) $>$ (*максимальное число весов w_i,*

таких что наибольший общий делитель остальных больше 1).

Для произвольного торического многообразия вместо числа дивизоров Картье следует брать число подвижных дивизоров (то есть тех, которые можно сдвинуть с любой точки), а второе число равно коразмерности максимального конуса, ребра которого не являются частью базиса.

3) Предположение одномерности решетки Пикара объемлющего многообразия было сделано для наглядности; в случае числа Пикара, большего 1, теоремы 3.11 и 3.12 формулируются и доказываются аналогично. Вместо переменной t нужно взять мультипеременную $t = (t_1, \ldots, t_m)$, где $m = \operatorname{rk} \operatorname{Pic} X$, вместо степени кривой рассматривать мультистепень относительно набора образующих группы Пикара и т. д.; изменится лишь выражение для поправочного члена $e^{-\alpha_X t}$.

4) Если опустить предположение $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}$ (или $\dim X \geqslant 3$ в замечании 3.14, 1)), то теоремы 3.11 и 3.12 будут давать *ограниченный* I-ряд (см. замечание 2.10).

5) Эти теоремы можно обобщить на случай многообразий Калаби–Яу; их доказательства в этом случае будут отличаться от доказательства теорем 3.11 и 3.12 лишь выводом выражений для поправочного члена (см. следствие 2.29).

Пример 3.15. 1) Рассмотрим общую гиперповерхность $X^k \subset \mathbb{P}^n$. Пусть $k < n$. Тогда теорема 3.11 утверждает, что

$$I^X = \sum_{d=0}^{\infty} t^d \frac{(kL+1)_{\boldsymbol{kd+1}}}{((L+1)_{\boldsymbol{d+1}})^{n+1}}.$$

Если $k = n$, то, по теореме 3.11,

$$I^X = e^{-k!t} \sum_{d=0}^{\infty} t^d \frac{(kL+1)_{\boldsymbol{kd+1}}}{((L+1)_{\boldsymbol{d+1}})^{n+1}}.$$

Эти формулы согласуются с формулами из следствия 2.28.

2) В случае обычного проективного пространства ($w_i = 1$) теорема 3.11 также согласуются с формулами из следствия 2.28.

3.2 Соотношения. Трехмерный случай

Для доказательства теорем 3.21 и 3.22 мы найдем I-ряды многообразий Фано (а, точнее, их фундаментальные и дивизориальные части), а потом восстановим из них считающие матрицы. В этом параграфе мы приведем конкретные выражения, с помощью которых мы найдем матрицы.

Предложение 3.16. *Для каждых $n \in \mathbb{N}$, $k, d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ существует многочлен $f_k^d \in \mathbb{Q}[a_{i,j}]$, $0 \leqslant i, j \leqslant n$, $j-i+1 \leqslant d$, такой что верно следующее утверждение. Рассмотрим квантово минимальное многообразие Фано Y размерности n. Обозначим $H = -K_Y$. Тогда*

$$\langle \tau_k H^{d+n-2-k} \rangle_d = f_k^d(a_{ij}),$$

где $a_{i,j} = \langle H^{n-i}, H^{\beta}, H \rangle_{j-i+1} / \deg Y = \frac{j-i+1}{\deg Y} \langle H^{n-i}, H^j \rangle_{j-i+1}$.

Доказательство (ср. доказательство теоремы 2.56). Стратегия нахождения f_k^d такова: по аксиоме дивизора выразим данный одноточечный инвариант через трехточечные с потомками, а потом, с помощью топологической рекурсии, выразим эти трехточечные инварианты через примарные двухточечные.

Применяя аксиому дивизора для H

$$\langle \tau_k H^{d+n-2-k} \rangle_d = 1/d \cdot (\langle H, \tau_k H^{d+n-2-k} \rangle_d - \langle \tau_{k-1} H^{d+n-1-k} \rangle_d),$$

легко получить, что

$$\langle \tau_k H^{d+n-2-k} \rangle_d = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{d^i} \langle H, \tau_{k-i} H^{d+i+n-2-k} \rangle_d.$$

Далее, по топологической рекурсии

$$\langle H^a, \tau_k H^{d+n-1-a-k} \rangle_d = 1/d (\sum_{d_1 \leqslant d} \langle H^{d_1-d+1+a}, \tau_{k-1} H^{d+n-1-a-k} \rangle_{d_1} \cdot a_{d_1-d+a+1,a} -$$
$$\langle H^a, \tau_{k-1} H^{d+n-a-k} \rangle_d).$$

Эту формулу также легко упростить. Рекурсивно выражая последнее слагаемое в правой части, получим

$$\langle H^a, \tau_k H^{d+n-1-a-k}\rangle_d = \sum_{\substack{i\,=\,1..k,\\ d_1\leqslant d}} \frac{(-1)^{i+1}}{d^i} a_{d_1-d+1+a,a}\langle H^{d_1-d+1+a}, \tau_{k-i}H^{d+n-2-a-k+i}\rangle_{d_1} + \frac{(-1)^k}{d^k}\langle H^a, H^{d+n-a}\rangle_d.$$

□

Замечание 3.17. Мы предположили, что Y квантово минимально для простоты, так как мы будем использовать это в дальнейшем. Аналогичные выражения могут быть найдены так же, как и в доказательстве предложения 3.16, и в более общем случае, для многообразий, для которых подалгебра в $H^*(Y)$, мультипликативно порожденная $H^2(Y)$, замкнута относительно квантового умножения.

Пример 3.18. Рассмотрим гладкое многообразие Фано Y с группой Пикара $\mathbb{Z}$. Тогда имеем:

- Фундаментальный член I-ряда.

  1: $\langle H^3\rangle_2 = \deg Y \cdot a_{01}/4$;

  2: $\langle \tau H^3\rangle_3 = \deg Y \cdot (a_{11}a_{01}/18 + a_{02}/27)$;

  3: $\langle \tau_2 H^3\rangle_4 = \deg Y \cdot (a_{01}^2/64 + a_{11}^2 a_{01}/96 + 7a_{11}a_{02}/576 + a_{01}a_{12}/128 + a_{03}/256)$.

- Дивизориальный член I-ряда.

  1: $\langle H^2\rangle_1 = \deg Y \cdot a_{11}$;

  2: $\langle \tau H^2\rangle_2 = \deg Y \cdot (a_{11}^2/4 + a_{12}/8 - a_{01}/4)$;

  3: $\langle \tau_2 H^2\rangle_3 = \deg Y \cdot (5a_{11}a_{01}/108 + a_{11}^3/18 + a_{11}a_{12}/12 - 2a_{02}/81)$;

4: $\langle \tau_3 H^2\rangle_4 = \deg Y \cdot (13a_{11}^2a_{01}/576 + 17a_{11}a_{02}/1728 - a_{03}/256 - 3a_{01}^2/128 + a_{11}^4/96 + a_{12}^2/256 + a_{11}^2a_{12}/32)$.

Таким образом,

$$I^Y = 1 + a_{11}t + (a_{01}/4 + (a_{11}^2/4 + a_{12}/8 - a_{01}/4)H)t^2 + ((a_{11}a_{01}/18 + a_{02}/27) + (5a_{11}a_{01}/108 + a_{11}^3/18 + a_{11}a_{12}/12 - 2a_{02}/81)H)t^3 + ((a_{01}^2/64 + a_{11}^2a_{01}/96 + 7a_{11}a_{02}/576 + a_{01}a_{12}/128 + a_{03}/256) + (13a_{11}^2a_{01}/576 + 17a_{11}a_{02}/1728 - a_{03}/256 - 3a_{01}^2/128 + a_{11}^4/96 + a_{12}^2/256 + a_{11}^2a_{12}/32)H)t^4 + \ldots \pmod{H^2}.$$

3.3 Доказательство теорем 3.21 и 3.22

Следующая теорема является частным случаем общей теоремы Мукаи, описывающей гладкие трехмерные многообразия Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ в терминах сечений пучков на грассманианах.

Теорема 3.19 (Мукаи, [Mu92]). *Общее гладкое трехмерное многообразие Фано V_{10} рода* 6 (*и антиканонической степени* 10) *является сечением грассманиана $G(2,5)$ линейным пространством коразмерности 2 и квадрикой в плюккеровом вложении.*

Гладкое трехмерное многообразие Фано V_{14} рода 8 (*и антиканонической степени* 14) *является сечением грассманиана $G(2,6)$ линейным пространством коразмерности 5 в плюккеровом вложении.*

Рассмотрим следующие многообразия Фано (см. [Is77], [Is78], [Is79], [Is88], [IP99], [Mu92]).

1: Многообразие V_1 антиканонической степени 8 (двойное накрытие конуса над поверхностью Веронезе с ветвлением в гладкой кубике).

2: Многообразие V_2 антиканонической степени 16 (двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гладкой квартике).

3: Многообразие V_2' антиканонической степени 2 (двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гладкой секстике).

Предложение 3.20. *Многообразия V_1, V_2 и V_2' допускают следующую конструкцию.*

1: *Многообразие типа V_1 изоморфно гладкой гиперповерхности степени шесть в $\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$.*

2: *Многообразие типа V_2 изоморфно гладкой гиперповерхности степени четыре в $\mathbb{P}(1,1,1,1,2)$.*

3: *Многообразие типа V_2' изоморфно гладкой гиперповерхности степени шесть в $\mathbb{P}(1,1,1,1,3)$.*

Доказательство. Двойное накрытие $\mathbb{P}(w_0,\ldots,w_n)$, разветвленное в дивизоре, заданном функцией $f_k(x_0,\ldots,x_n)$ степени k, можно задать уравнением $x_{n+1}^2=f_k$ в $\mathbb{P}(w_0,\ldots,w_n,k/2)$. Здесь переменные x_i имеют веса w_i, а переменная x_{n+1} имеет вес $k/2$. $\square$

Теорема 3.21. *Считающие матрицы многообразий V_{10} и V_{14} равны:*

1: *Для многообразия V_{10}*

$$M(V_{10})=\begin{bmatrix} 0 & 156 & 3600 & 33120 \\ 1 & 10 & 380 & 3600 \\ 0 & 1 & 10 & 156 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $\alpha_{V_{10}}$ равен 6.

2: *Для многообразия* V_{14}

$$M(V_{14}) = \begin{bmatrix} 0 & 64 & 924 & 5936 \\ 1 & 5 & 140 & 924 \\ 0 & 1 & 5 & 64 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $\alpha_{V_{14}}$ *равен 4.*

Доказательство. По теореме 3.19 эти многообразия — полные пересечения в $G(2,5)$ (для V_{10}) и $G(2,6)$ (для V_{14}).

Пусть H — эффективная образующая группы Пикара грассманиана $G = G(r,n)$. Положим $I^G = I^G_{H^0}(t) + I^G_{H^1}(t) \cdot H \pmod{H^4(G)}$, то есть

$$I^G = I^G_{H^0}(t) + I^G_{H^1}(t) \cdot H + \widetilde{I},$$

где $\widetilde{I} \in H^{>2}(G)$.

По следствию 2.19

$$I^{G(2,5)}_{H^0} = 1 + 3t + \frac{19}{32}t^2 + \frac{49}{2592}t^3 + \frac{139}{884736}t^4 + \ldots,$$
$$I^{G(2,6)}_{H^0} = 1 + 4t + \frac{3}{4}t^2 + \frac{95}{5832}t^3 + \frac{865}{11943936}t^4 + \ldots.$$

Пользуясь теоремой 2.18, рассмотрим I-ряды грассманианов $G(2,5)$ и $G(2,6)$ как ряды от элементарных симметрических функций x_1+x_2 и x_1x_2 от корней Чженя x_1 и x_2 расслоения, двойственного к тавтологическому подрасслоению. Тогда $I^G_{H^1}$ — это коэффициент при линейной симметрической функции $x_1 + x_2$. Таким образом,

$$I^{G(2,5)}_{H^1} = 10t + \frac{105}{32}t^2 + \frac{3115}{23328}t^3 + \frac{6875}{5308416}t^4 + \ldots,$$
$$I^{G(2,6)}_{H^1} = 15t + \frac{609}{128}t^2 + \frac{6197}{46656}t^3 + \frac{528737}{764411904}t^4 + \ldots.$$

По следствию 2.28, $\alpha_{V_{10}} = 6$ и $\alpha_{V_{14}} = 4$. Кроме того,

$$I^{V_{10}} = 1 + 10Ht + (39 + \frac{67}{2}H)t^2 + (220 + \frac{3200}{9}H)t^3 + \\ (\frac{6291}{4} + \frac{89387}{48}H)t^4 + \dots \pmod{H^2},$$

$$I^{V_{14}} = 1 + 5Ht + (16 + \frac{31}{4}H)t^2 + (2 + \frac{1031}{18}H)t^3 + \\ (230 + \frac{14863}{96}H)t^4 + \dots \pmod{H^2}.$$

Легко видеть, что выражения из примера 3.18 позволяют восстановить коэффициенты считающей матрицы многообразия Y из ряда $I^Y \pmod{H^2}$. $\square$

Теорема 3.22. *Считающие матрицы многообразий V_1, V_2 и V_2' равны:*

1: *Для многообразия V_1*

$$M(V_1) = \begin{bmatrix} 0 & 240 & 0 & 57600 \\ 1 & 0 & 1248 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 240 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг α_{V_1} равен 0.

2: *Для многообразия V_2*

$$M(V_2) = \begin{bmatrix} 0 & 48 & 0 & 2304 \\ 1 & 0 & 160 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг α_{V_2} равен 0.

3: *Для многообразия* V_2'

$$M(V_2') = \begin{bmatrix} 0 & 137520 & 119681240 & 21690374400 \\ 1 & 624 & 650016 & 119681240 \\ 0 & 1 & 624 & 137520 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сдвиг $\alpha_{V_2'}$ *равен 120.*

Доказательство. По предложению 3.20 представим данные многообразия как гиперповерхности во взвешенных проективных пространствах. По теореме 3.11 найдем их одноточечные инварианты Громова–Виттена. Считающие матрицы теперь восстанавливаются с помощью выражений из примера 3.18. □

Кроме использованного нами способа нахождения двухточечных инвариантов, можно воспользоваться их восстановлением из фундаментального члена I-ряда. Продемонстрируем его на примере трехмерных многообразий.

Рассмотрим гладкое трехмерное многообразие Фано Y с числом Пикара 1. Положим $I_{H^0}^Y = 1 + d_2t^2 + d_3t^3 + d_4t^4 + d_5t^5 + d_6t^6 + \ldots$. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{A}^5 \to \mathbb{A}^5$, задаваемое многочленами $f_{i-2,3}^i$, соответствующими инвариантам $\langle \tau_{i-2}(H^0)^\vee \rangle_i = d_i$ для $i = 2, \ldots, 6$.

Предложение 3.23. *Отображение* f *бирационально.*

Доказательство. Проверяется непосредственным вычислением. Заметим, что это отображение бирегулярно, если

$$-495d_3d_5 + 261d_2d_3^2 - 312d_4d_2^2 + 432d_4^2 + 56d_2^4 \neq 0,$$

что (апостериори) верно для трехмерных многообразий Фано. □

Глава 4

Модели Ландау–Гинзбурга

4.1 Слабые модели Ландау–Гинзбурга

Рассмотрим тор $\mathbb{T} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n = \prod_{i=1}^n \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_i, x_i^{-1}]$ и функцию f на нем. Эта функция может быть представлена многочленом Лорана: $f = f(x_1, x_1^{-1}\ldots, x_n, x_n^{-1})$. Пусть $\phi_f(i)$ — свободный член (то есть коэффициент при $x_1^0\cdot\ldots\cdot x_n^0$) многочлена f^i. Положим

$$\Phi_f = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_f(i)\cdot t^i \in \mathbb{C}[[t]].$$

Определение 4.1. Ряд $\Phi_f = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_f(i)\cdot t^i$ называется *рядом свободных членов* многочлена f.

Определение 4.2. Пусть X — гладкое n-мерное квантово минимальное многообразие Фано, а $I_{H^0}^X \in \mathbb{C}[[t]]$ — его фундаментальный член I-ряда. Многочлен Лорана $f\in\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ называется *очень слабой моделью Ландау–Гинзбурга* для X, если

$$\Phi_f(t) = I_{H^0}^X(t).$$

Многочлен Лорана $f\in\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ называется *слабой моделью Ландау–Гинзбурга* для X если он является очень слабой моделью Ландау–

Гинзбурга для X и для почти всех $t \in \mathbb{C}$ гиперповерхность $(1 - tf = 0)$ бирационально эквивалентна многообразию Калаби–Яу.

Смысл этого определения следующий (см. [SB85], 10, или [Beu83], стр. 50–52). Рассмотрим функции $F_t = 1 - t \cdot f \in \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}][t]$. Они задают пучок $\mathbb{T} \to \mathbb{B} = \mathbb{P}[u : v] \setminus (0 : 1)$ со слоями $Y_t = (F_t = 0)$, $t = (1 : t) \in \mathbb{B}$.

Следующее предложение является математическим фольклором.

Предложение 4.3. *Пусть многогранник Ньютона функции* $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ *содержит строго внутри себя* 0. *Пусть* $t \in \mathbb{B}$ *— локальная координата в окрестности точки* $(0 : 1)$. *Тогда существуют послойная* n*-форма* $\omega_t \in \Omega^n_{\mathbb{T}/\mathbb{B}}$ *и (локально определенный) послойный* n*-цикл* Δ_t*, такой что*

$$\Phi_f(t) = \int_{\Delta_t} \omega_t.$$

Другими словами, $\Phi_f(t)$ является решением уравнения Пикара–Фукса для пучка $\{Y_t\}$.

Доказательство. Следующее рассуждение основано на [Gr69], §3.

Пусть

$$T_s = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{T} : |x_1| = \ldots = |x_n| = s\},$$

$T = T_1$, и $R_\delta = \cup T_s$, $\delta \leq s \leq 1$ (мы рассматриваем естественную метрику на торе, заданную вложением $\mathbb{T} \hookrightarrow \mathbb{C}^n$). Пусть t достаточно мало, так что $Y_t \cap T = \emptyset$, или, другими словами, $|f(T)| < |1/t|$. Пусть δ достаточно мало, так что $Y_t \cap T_\delta = \emptyset$ (f имеет слагаемые отрицательной степени). Можно считать, что R_δ и Y_t пересекаются трансверсально. Пусть $\Delta_t = Y_t \cap R_\delta \in Y_t$.

Пусть $Y_t^\varepsilon = \{p \in \mathbb{T} | \, \exists v \in Y_t : |p - v| < \varepsilon\}$, где ε достаточно мало. Тогда $\Delta_t^\varepsilon = R_\delta \cap Y_t^\varepsilon$ — "труба" над Δ_t. Ясно, что $\partial(R_\delta \setminus Y_t^\varepsilon) = T + T_\delta - \Delta_t^\varepsilon$, так что циклы $T + T_\delta$ и Δ_t^ε гомологически эквивалентны.

Пусть

$$\Omega_t = \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{1}{F_t} \prod_{i=1}^n \frac{dx_i}{x_i}.$$

Рассмотрим интеграл

$$\Phi(t) = \int_{T+T_\delta} \Omega_t.$$

Легко видеть, что $\int_{T_\delta} \Omega_t$ стремится к нулю при $\delta \to 0$. Так как он этот интеграл постоянен, он равен нулю. Таким образом, интегрируя его по частям, имеем $\Phi(t) = \int_T \Omega_t = \Phi_f(t)$.

С другой стороны, по теореме Пуанкаре о вычетах

$$\Phi(t) = \int_{\Delta_t^\varepsilon} \Omega_t = \int_{\Delta_t} \mathrm{Res}_{Y_t} \Omega_t = \int_{\Delta_t} \omega_t.$$

□

Пусть $PF_f = PF_f(t, \frac{\partial}{\partial t})$ — оператор Пикара–Фукса для $\{Y_t\}$. Пусть m — порядок нуля оператора PF_f, а r — его степень по t. Пусть Y — полустабильная компактификация пучка $\{Y_t\}$ (получающееся при компактификации отображение $\widetilde{f} \colon Y \to \mathbb{P}^1$ обозначим для простоты через f). Пусть m_f — размерность трансцендентной части $R^{n-1} f_! \mathbb{Z}_Y$ (алгоритм для ее вычисления см. в [DH86]). Пусть r_f — число особенностей отображения f (с кратностями). Тогда $m \leq m_f$ и $r \leq r_f$. Таким образом, первые несколько коэффициентов разложения решения уравнения Пикара–Фукса определяют остальные. В частности, это значит, что если первые несколько коэффициентов разложения решения уравнения $L\Phi = 0$, $L \in \mathbb{C}[t, \frac{d}{dt}]$, совпадают с первыми несколькими коэффициентами разложения ряда Φ_f, то $L = PF_f$.

4.2 Слабые модели Ландау–Гинзбурга для V_{16}, V_{18} и V_{22} и их свойства

Теорема 4.4.

1. *Многочлен Лорана*

$$f_{16} = \frac{1}{xyz} + 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}\right) + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}\right) + 4 + (x + y + z)$$

является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для многообразия V_{16}.

2. *Многочлен Лорана*

$$f_{18} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}\right) + 3 + (x + y + z)$$

является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для многообразия V_{18}.

3. *Многочлен Лорана*

$$f_{22} = \frac{xy}{z} + \frac{y}{z} + \frac{x}{z} + x + y + \frac{1}{z} + 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + z + \frac{1}{xy} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{z}{xy}$$

является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для многообразия V_{22}.

Доказательство. Операторами типа $D3$ являются

$$D^3 - 4t(2D + 1)(3D^2 + 3D + 1) + 16t^2(D + 1)^3$$

для V_{16},

$$D^3 - 3t(2D+1)(3D^2+3D+1) - 27t^2(D+1)^3$$

для V_{18} и

$$D^3 - \frac{2}{5}t(2D+1)(17D^2+17D+16) - \frac{56}{25}t^2(D+1)(11D^2+22D+12) - \frac{126}{125}t^3(D+1)(D+2)(2D+3) - \frac{1504}{625}t^4(D+1)(D+2)(D+3)$$

для V_{22} (см. [Go05]). Степени операторов Пикара–Фукса для пучков, задающихся многочленами f_{16}, f_{18} и f_{22} ограничены 3 по D и 4 по t. Можно проверить, что первые несколько коэффициентов разложения ряда свободных членов и фундаментального члена I-ряда совпадают. Таким образом, эти многочлены являются слабыми моделями Ландау–Гинзбурга.

Компактифицируем тор до $\mathbb{P}^3$ стандартным образом. Тогда элементы пучков, задающихся многочленами f_{16}, f_{18} и f_{22} являются квартиками в $\mathbb{P}^3$, так что их канонический класс тривиален. По теореме Бертини особые точки общего элемента пучка — это его базисные точки. Легко проверить, что все базисные точки наших пучков дювалевские, так что минимальные модели общих слоев пучков имеют тривиальный канонический класс. По теореме 5.1 из [Ch96], общий слой бирационально эквивалентен поверхности типа $K3$. □

Замечание 4.5. Определение слабой модели Ландау–Гинзбурга численное. Поэтому естественно, что многочлены из теоремы 4.4 не единственные. К примеру, многочлены, полученные некоторыми заменами координат или растяжениями $x \to \alpha x$, $y \to \beta y$, $z \to \gamma z$ также являются слабыми моделями Ландау–Гинзбурга.

Особенности. Общая философия зеркальной симметрии говорит, что для каждого гладкого многообразия Фано существует двойственная модель Ландау–Гинзбурга, то есть пучок проективных многообразий, симплектические свойства которого соответствуют алгебро–геометрическим свойствам многообразия, и наоборот. В частности, пучок исчезающих циклов к “очень особому” элементу пучка соответствует горизонтальным ходжевым когомологиям, а элементы пучка с изолированными особенностями соответствуют производной категории когерентных пучков многообразия. Слои слабых моделей Ландау–Гинзбурга некомпактны. Рассмотрим торическое многообразие, задающееся многогранником Ньютона слабой модели Ландау–Гинзбурга. Компактифицируем элементы пучка, задающегося слабой моделью Ландау–Гинзбурга, в этом торическом многообразии. Ожидается, что разрешение этого компактифицированного пучка и есть модель Ландау–Гинзбурга многообразия.

В любом случае, “интересные” особенности наших трех пучков находятся и на некомпактной части. А именно, особые точки слоев являются особыми точками отображения f_i. В случае f_{16}, f_{18} и f_{22} — это:

f_{16}: (приводимая) кривая рода 3 в слое над бесконечностью и две сопряженные точки, определенные над квадратичным расширением $\mathbb{Q}$.

f_{18}: (приводимая) кривая рода 2 в слое над бесконечностью и две сопряженные точки, определенные над квадратичным расширением $\mathbb{Q}$.

f_{22}: три сопряженные точки, определенные над расширением $\mathbb{Q}$ степени три.

Слои над бесконечностью для этих случаев совпадают с ожиданием. А именно, для каждого случая род схемы особенностей равен размерности промежуточного якобиана соответствующего многообразия.

Образами особых точек являются особые точки операторов типа $D3$ для этих многообразий.

Замечание 4.6. Описываемый подход к поиску и построению моделей Ландау–Гинзбурга (с помощью многочленов Лорана) продемонстрирован нами на трех классах трехмерных многообразиях Фано. Однако он применим и в гораздо более общем случае. Например, слабой моделью Ландау–Гинзбурга для полного пересечения гиперповерхностей степеней $k_1, \ldots, k_r$ в $\mathbb{P}^N$ является многочлен Лорана

$$\frac{\prod_{i=1}^{r}(x_{i,1}+\ldots+x_{i,k_i-1}+1)}{\prod x_{i,j}\cdot\prod y_i}+y_1+\ldots+y_n\in\mathbb{C}[\{x_j,x_j^{-1},y_s,y_s^{-1}\}],$$

где $n=N-\sum k_i$. Это — переформулировка модели Ландау–Гинзбурга для полного пересечения, предложенной Хори–Вафа ([HV00]). Более того, все известные на данный момент модели Ландау–Гинзбурга для гладкх многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ являются компактификациями слабых моделей. Естественным образом это приводит к следующему предположению (на взгляд автора слишком смелому, чтобы называться гипотезой).

Вопрос 4.7. *Верно ли, что все модели Ландау–Гинзбурга для гладких многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ являются компактификациями слабых моделей? Если нет, то какие из них являются?*

4.3 Методы поиска

К сожалению, нахождение слабых моделей Ландау–Гинзбурга – очень сложная вычислительная задача. В этом параграфе мы обсудим (эмпирические) пути ее упрощения.

Канонические вырождения и численные инварианты.

Определение 4.8. (*Локальной*) *деформацией* называется плоский морфизм $\mathcal{X} \to S$, где $S = (S, s_0)$ — росток гладкого многообразия (обычно росток кривой). Слой над центральной точкой X_{s_0} называется *центральным слоем.* Слои над остальными точками называются *общими слоями.* Говорят, что общий слой *вырождается* к центральному слою или что $\mathcal{X}$ — *вырождение* к X_{s_0}.

Теорема 4.9 (Кавамата, [Ka97]). *Пусть $\mathcal{X} \to S$ — деформация (S — росток кривой). Пусть X_{s_0} имеет канонические особенности. Тогда $\mathcal{X}$ имеет канонические особенности. В частности, для любой точки $s \in S$ слой X_s имеет канонические особенности.*

Следствие 4.10. *Тотальное пространство $\mathcal{X}$ является $\mathbb{Q}$-горенштейновым. Таким образом, по формуле присоединения, для $s \in S$ выполнено $-K_{X_s} = -K_{\mathcal{X}}|_{X_s}$. В частности, антиканоническая степень $(-K_s)^{\dim X_s}$ не зависит от $s \in S$.*

4.11. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathcal{X}$, плоский над S. Тогда эйлерова характеристика $\chi(X_s, \mathcal{F}_s)$ не зависит от $s \in S$ (см., к примеру, [Da96], предложение 3.8). Пусть X_s — каноническое многообразие для всех $s \in S$, $s \neq s_0$, и X_{s_0} — каноническое многообразие почти Фано (то есть его антиканонический дивизор объемен и численно эффективен). По теореме Кавамaты–Февега об обращении в нуль (теорема 2.17 в [Kol96]), $\chi(X_s, -K_s) = h^0(X_s, -K_s)$. Отсюда $h^0(X_s, -K_s)$ не зависит от $s \in S$.

Предложение 4.12. *Пусть $\pi\colon \mathcal{X} \to S$ — деформация, такая что ее общий слой — многообразие Фано ранга Пикара k, а центральный слой*

X_{s_0} — неприводимое проективное нормальное многообразие почти Фано. Пусть все слои имеют канонические особенности. Пусть $\mathrm{Pic}\,(X_{s_0}) = \mathbb{Z}^m$. *Тогда $m \leq k$.*

Доказательство (идея принадлежит Иво Радлоффу). Мы будем использовать группы Пикара и когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Q}$. Пусть $\Delta = \{t : |t - s_0| < \varepsilon\} \subset S$ — достаточно малая окрестность точки s_0 и $X = \pi^{-1}(\Delta)$. Тогда $H^2(X) = H^2(X_{s_0})$, так как X_{s_0} является деформационным ретрактом многообразия X. По теореме Кавамата–Февега об обращении в нуль и точной экспоненциальной последовательности $H^2(X) \cong \mathrm{Pic}\,(X)$ и $H^2(X_{s_0}) \cong \mathrm{Pic}\,(X_{s_0})$ (X — относительное многообразие Фано). Таким образом, необходимо показать, что не существует такого обратимого пучка $\mathcal{L}$, что ограничение $\mathcal{L}|_{X_s} \cong \mathcal{O}_{X_s}$ для $s \neq s_0$ и положительно для $s = s_0$ (численные и линейные эквивалентности над $\mathbb{Q}$ совпадают).

Предположим, что он существует. По полунепрерывности (см., к примеру, теорему 3.6 в [Da96]), существует сечение $\mathcal{L}|_{s_0}$. Оно ненулевое по предположению, так что оно является эффективным дивизором. Обозначим размерность слоев через n. (Мы будем применять теорию пересечений к пучкам так же как соответствующим линейным системам.) Центральный слой проективен, так что существует дивизор $\mathcal{D}$ на X, ограничение которого на центральный слой обильно. Итак, $\mathcal{D}^{n-1} \cdot \mathcal{L} \cdot X_{s_0} = (\mathcal{D}|_{X_{s_0}})^{n-1} \cdot \mathcal{L}|_{s_0} > 0$. Индекс пересечения не зависит от слоя, так как все слои численно эквивалентны. Пучок $\mathcal{L}$, ограниченный на общий слой численно тривиален. Противоречие. $\square$

Следствие 4.13. . *Пусть $\mathcal{X} \to S$ — вырождение многообразия Фано с* *группой Пикара $\mathbb{Z}$ к торическому каноническому многообразию Фано X_{s_0}. Тогда антиканоническая степень $(-K_{X_s})^{\dim X_s}$, $h^0(-K_{X_s})$ и ранг Пикара слоя X_s не зависит от $s \in S$.*

Доказательство. Это следует из 4.10, 4.11 и 4.12. □

Стратегия.

Таким образом, естественной стратегией нахождения слабых моделей Ландау–Гинзбурга является следующая. Рассмотрим гладкое трехмерное многообразие Фано X с группой Пикара $\mathbb{Z}$. Найдем фундаментальный член $I_{H^0}^X = \sum a_r t^r$, $a_r \in \mathbb{Q}$, его I-ряда. Предположим, что X вырождается к каноническому многообразию Фано X_Σ и предположим, что существует слабая модель Ландау–Гинзбурга f для X, многогранник Ньютона которой лежит в P_Σ. Найдем ее. Для этого найдем все целочисленные многогранники, имеющие единственную внутреннюю точку ноль, численные характеристики которых совпадают с характеристиками многообразия X. Рассмотрим такой многогранник и многочлен Лорана $f = \sum b_{ijk} x^i y^j z^k \in \mathbb{C}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}][b_{ijk}]$, многогранник Ньютона которого совпадает с нашим. Пусть $\Phi_f = \sum b_r(b_{ijk}) t^r$ — его ряд свободных членов. Чтобы найти коэффициенты b_{ijk}, решим систему уравнений $\{b_r(b_{ijk}) = a_r\}$, $r = 1, \ldots, M$, где число $M \in \mathbb{N}$ достаточно велико; чтобы избежать растяжений, нормализуем x, y и z так, что b_{100}, b_{010} и b_{001} равны 0 или 1. Докажем, что $\Phi_f = I_{H^0}^X$ для найденного нами f. Для этого проверим ,что для всех коэффициентов Φ_f выполнена та же рекурсия, что и для $I_{H^0}^X$. Наконец, чтобы доказать, что общий элемент найденного пучка бирационально эквивалентен многообразию Калаби–Яу, обычно достаточно компактифицировать слои тора $\mathbb{G}_\mathrm{m}^n \subset \mathbb{P}^n$ до гиперповерхностей в $\mathbb{P}^n$, проверить их степень и, используя теорему Бертини, показать существование крепантного разрешения общего слоя.

Чтобы “легализовать” эту эмпирическую стратегию, необходимо решить две следующие проблемы.

Проблема 4.14. *Доказать, что любое гладкое трехмерное многообразие Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ допускает вырождение к каноническому торическому многообразию Фано. Найти все такие вырождения. Охарактеризовать их. Обобщить это на более общий класс многообразий Фано или на торические многообразия с более плохими особенностями.*

Эта проблема может быть решена, если особенности торического многообразия терминальные горенштейновы (то есть обыкновенные двойные точки) (эта идея принадлежит Галкину). К сожалению, существует только пять таких многообразий: $\mathbb{P}^3$, квадрика, полное пересечение двух квадрик, многообразия V_5 и V_{22}. Интересно, что нам не требуется конкретный вид вырождения (хотя в некоторых случаях, например для квадрики или для полного пересечения двух квадрик он может быть найден, см. [Ba97]). К сожалению, нельзя ожидать, что любое гладкое многообразие Фано вырождается к *горенштейнову* каноническому торическому многообразию Фано (то есть построенному по рефлексивному многограннику). Примером является V_2: не существует рефлексивных многогранников объема $\frac{1}{3}$.

Проблема 4.15. *Пусть гладкое многообразие Фано X вырождается к каноническому торическому многообразию T. Доказать, что существуют слабая модель Ландау–Гинзбурга f для X с многогранником Ньютона Δ и существует веер Σ для T, такой что $P_\Sigma = \Delta^\vee$.*

Хорошими ссылками для этой проблемы являются [Ba97] и [BCFKS98].

К сожалению, этот прямой путь слишком сложен по вычислительным причинам. Во-первых, существует слишком много подходящих многогранников. Во-вторых, в трехмерном многограннике как правило много целочисленных точек, поэтому в системе уравнений слишком много неизвестных. В-третьих, решение системы полиномиальных уравнений — сама по себе очень сложная вычислительная задача.

Для решения этих проблем необходимо сделать некоторые ограничения на рассматриваемые многочлены.

Для решения первой проблемы мы рассматриваем не все многогранники, а некоторый их класс (такой, как класс рефлексивных многогранников, многогранников с большим количеством симметрий или многогранников, содержащихся в кубе $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$) и надеемся, что X вырождается к торическому многообразию с многогранником из этого класса. При росте степени многообразия Фано многогранники "упрощаются".

Для решения второй проблемы мы рассматриваем не все функции, а функции некоторого типа. А именно, можно рассматривать многочлены Лорана $f(x,y,z)$, симметричные относительно перестановок x,y,z. Также можно рассматривать многочлены с коэффициентами 1 в вершинах их многогранников Ньютона. Найденные нами многочлены имеют такой вид.

Наконец, мы надеемся, что коэффициенты многочленов целые. Для нахождения целого решения системы уравнений ее можно решить по модулю некоторых простых чисел, "поднять" решения в $\mathbb{Z}$ и проверить корректность поднятых решений. На практике мы перебираем все возможности для $a_{ijk} \bmod p$ и проверяем, выполнены ли для них уравнения.

Приложение А

Публикации по теме диссертации

(А1) Пржиялковский В. В., *Инварианты Громова-Виттена трехмерных многообразий Фано рода 6 и рода 8*, Матем. сб., 2007, 198:3, 145–158.

(А2) Пржиялковский В. В., *Квантовые когомологии гладких полных пересечений во взвешенных проективных пространствах и особых торических многообразиях*, Матем. сб., 2007, 198:9, 107–122.

(А3) Пржиялковский В. В., *Минимальное кольцо Громова-Виттена*, Деп. в ВИНИТИ 16.10.07, № 961-В 2007.

Литература

[AKO05] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov, *Mirror symmetry for Del Pezzo surfaces: Vanishing cycles and coherent sheaves*, Inv. Math. 166, No. 3 (2006), 537–582 (preprint (2005) arXiv:math.AG/0506166).

[AS72] M. Abramowitz, I. Stegun (eds.) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing*, New York: Dover, 1972.

[Ba94] V. V. Batyrev, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*, J. Algebr. Geom. 3, No.3 (1994), 493–535 (preprint (1993) arXiv:alg-geom/9310003).

[Ba97] V. V. Batyrev, *Toric Degenerations of Fano Varieties and Constructing Mirror Manifolds*, Collino, Alberto (ed.) et al., The Fano conference. Papers of the conference, Torino, Italy, September 29–October 5, 2002. Torino: Universita di Torino, Dipartimento di Matematica. 109–122 (2004) (preprint (1997), arXiv:alg-geom/9712034).

[BaMa01] A. Bayer, Yu. I. Manin *(Semi)simple exercises in quantum cohomology*, Collino, Alberto (ed.) et al., The Fano conference. Papers of the conference, Torino, Italy, September 29–October 5, 2002.

Torino: Universita di Torino, Dipartimento di Matematica (2004), 143–173 (preprint (2001) arXiv:math/0103164).

[BB94] V. V. Batyrev, L. A. Borisov, *On Calabi-Yau complete intersections in toric varieties*, Andreatta, Marco (ed.) et al., Higher dimensional complex varieties. Proceedings of the international conference, Trento, Italy, June 15–24, 1994. Berlin: Walter de Gruyter. 39–65 (1996) (preprint (1994) arXiv:alg-geom/9412017).

[BB95] V. V. Batyrev, L. A. Borisov, *Mirror duality and string-theoretic Hodge numbers*, Invent. Math. 126, No.1 (1996), 183–203 (preprint (1995) arXiv:alg-geom/9509009).

[BCFKS98] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Mirror Symmetry and Toric Degenerations of Partial Flag Manifolds*, Acta Math. 184, No. 1 (2000), 1–39 (preprint (1998), arXiv:math.AG/9803108).

[BCK03] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, *Two Proofs of a Conjecture of Hori and Vafa*, Duke Math. J. 126, No. 1 (2005), 101–136 (preprint (2003), arXiv:math.AG/0304403).

[Beu83] F. Beukers, *Irrationality of* π^2*, periods of an elliptic curve and* $\Gamma^1(5)$, Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Colloq. Luminy/Fr. 1982, Prog. Math. 31, 47–66.

[Bea95] A. Beauville, *Quantum cohomology of complete intersections*, Mat. Fiz. Anal. Geom. 2, No. 3–4 (1995), 384–398 (preprint (1995), arXiv:alg-geom/9501008).

[Beh96] K. Behrend, *Gromov–Witten invariants in algebraic geometry*, Invent. Math., 127(3), 1997, 601–617 (preprint (1996) arXiv:alg-geom/9601011).

[BeMa96] K. Behrend, Yu. I. Manin, *Stacks of Stable Maps and Gromov-Witten Invariants*, Duke Math J. vol. 85, No 1 (1996), 1–60 (preprint (1995), arXiv:alg-geom/9506023).

[BF96] K. Behrend, B. Fantechi, *The intrinsic normal cone*, Inv. Math. 128 (1997), 45–88 (preprint (1996) arXiv:alg-geom/9601010).

[BK00] A. Bertram, H. Kley, *New recursions for genus-zero Gromov–Witten invariants*, Topology 44, No. 1 (2005), 1–24 (preprint (2000), arXiv:math.AG/0007082).

[BvS93] V. V. Batyrev, D. van Straten, *Generalized hypergeometric functions and rational curves on Calabi–Yau complete intersections in toric varieties*, Comm. Math. Phys. 168 (1995), 493–533 (preprint (1993) arXiv:alg-geom/9307010).

[Ch96] И. А. Чельцов, *Трехмерные многообразия, обладающие дивизором с численно тривиальным каноническим классом*, Мат. Заметки, 59 No. 4 (1996), 618–626.

[CL55] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, -М:Издательство иностранной литературы (1958).

[COGP91] P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green, L. Parkes, *A pair of Calabi–Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl.Phys. B 359 (1991), 21–74.

[Da78] В. И. Данилов, *Геометрия торических многообразий*, Успехи матем. наук, т. 33, вып. 2 (200) (1978), 85–134.

[Da96] V. I. Danilov, *Cohomology of algebraic varieties*, Algebraic geometry II. Encycl. Math. Sci. 35, 1–126 (1996).

[DH86] В. И. Данилов, А. Г. Хованский, *Многогранники Ньютона и алгоритм вычисления чисел Ходжа–Делиня*, Изв. АН СССР, Сер. Мат., 50, No. 5 (1986), 925–945.

[Do82] I. V. Dolgachev, *Weighted projective varieties*, Lect. Notes Math., 1982, V. 956, 34–71.

[ES94] G. Ellingsrud, S. Stromme, *The number of twisted cubics on general quintic threefold*, Math. Scand. 76 (1995), no. 1, 175–193 (preprint (1994) arXiv:alg-geom/9409006).

[Fu93] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[FW04] W. Fulton, C. Woodward, *On the quantum product of Schubert classes*, J. Algebr. Geom. 13, No. 4 (2004), 641–661 (preprint (2001), arXiv:math.AG/0112183).

[Ga99] A. Gathmann, *Relative Gromov-Witten invariants and the mirror formula*, Math. Ann. 325, No. 2 (2003), 393–412 (preprint (1999), arXiv:math.AG/9908054).

[Ga00] A. Gathmann, *Absolute and relative Gromov-Witten invariants of very ample hypersurfaces*, Duke Math. J. 115, No. 2 (2002), 171–203 (preprint (2000), arXiv:math.AG/0009190).

[Gi96] A. B. Givental, *Equivariant Gromov - Witten Invariants*, IMRN (1996) No. 13, 613–663 (preprint (1996), arXiv:alg-geom/9603021).

[Gi97] A. B. Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Kashiwara, Masaki (ed.) et al., Topological field theory, primitive forms and related topics. Proceedings of the 38th Taniguchi symposium, Kyoto, Japan, December 9–13, 1996 Boston, MA: Birkhauser. Prog. Math. 160, 141–175 (1998) (preprint (1997), arXiv:alg-geom/9701016).

[GK93] A. B. Givental, B. Kim, *Quantum cohomology of flag manifolds and Todda lattices*, Comm. Math. Phys., 168 (1995), 609–641 (preprint (1993) arXiv:hep-th/9312096).

[Go02] В. В. Голышев, *Проблемы геометричности и модулярность некоторых вариаций Римана–Роха*, Доклады Академии наук, 386, No. 5 (2002), 583–588.

[Go01] В. В. Голышев, *Вариации Римана–Роха*, Изв. Акад. наук, Сер. Мат., 65, No.5 (2001) с. 3–32.

[Go05] V. V. Golyshev, *Classification problems and mirror duality*, LMS Lecture Note, ed. N. Young, 338 (2007) (preprint (2005) arXiv:math.AG/0510287).

[Gr69] P. Griffiths, *On the periods of certain rational integrals*, I, II, Ann. of Math. 90 (1969), 460–541.

[GS05] V. V. Golyshev, J. Stienstra, *Fuchsian equations of type DN*, Comm. Num. Th. Phys., Vol. 1 No. 2 (2007), 323–346 (preprint (2007) arXiv:math.AG/0701936).

[HM04] Дж. Харрис, Я. Моррисон, *Модули кривых*, -М.: Мир, 2004.

[HV00] H. Hori, C. Vafa, *Mirror symmetry*, preprint (2000), arXiv:hep-th/0002222.

[Is77] В. А. Исковских, *Многообразия Фано I*, Изв. АН СССР, Сер. Мат., 41 (1977), 516–562.

[Is78] В. А. Исковских, *Многообразия Фано II*, Изв. АН СССР, Сер. Мат., 42 (1978), 504–549.

[Is79] В. А. Исковских, *Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий*, -Итоги науки и техники, сер. Современные проблемы математики. Т. 12, М.: ВИНИТИ, с. 59–158 (1979).

[Is88] В. А. Исковских, *Лекции по трехмерным алгебраическим многообразиям. Многообразия Фано*, -М.: Московский университет (1988).

[IP99] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov, *Fano varieties*, Encyclopaedia Math. Sci. 47 (1999) Springer, Berlin.

[Ka96] S. Katz, *On the finiteness of rational curves on quintic threefolds*, Compositio Math. 60 (1986), 151–162.

[Ka97] Y. Kawamata, *Deformations of canonical singularities*, J. Am. Math. Soc. 12, No.1 (1999), 85–92 (preprint (1997) arXiv:alg-geom/9712018).

[KM94] M. L. Kontsevich, Yu. I. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Comm. Math. Phys. 164 (1994) 525–562 (preprint (1994) arXiv:hep-th/9402147).

[KM97] M. L. Kontsevich, Yu. I. Manin, *Relations between the correlators of the topological sigma-model coupled to gravity*, Commun.Math.Phys. 196 (1998) 385–398 (preprint (1997) arXiv:alg-geom/9708024).

[Kon94] M. L. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proc. International Congress of Mathematicians (Zürich 1994), Birkhäuzer, Basel, 1995, pp. 120–139 (preprint (1994) arXiv:alg-geom/9411018).

[Kol96] J. Kollar, *Singularities of pairs*, Kollar, J. (ed.) et al., Algebraic geometry. Proceedings of the Summer Research Institute, Santa Cruz, CA, USA, July 9–29, 1995. Providence, RI: American Mathematical Society. Proc. Symp. Pure Math. 62(pt.1), 221–287 (1997) (preprint (1996) arXiv:alg-geom/9601026).

[LP01] Y.-P. Lee, R. Pandharipande, *A reconstruction theorem in quantum cohomology and quantum K-theory*, Am. J. Math. 126, No. 6 (2004), 1367–1379 (preprint (2001), arXiv:math.AG/0104084).

[Ma02] Ю. И. Манин, *Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей*, -М.: Издательство "Факториал Пресс" (2002).

[Mu92] S. Mukai, *Fano 3-folds*, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 179, 255–263 (1992).

[Or03] Д. О. Орлов, *Триангулированные категории особенностей и D-браны в моделях Ландау-Гинзбурга* , Тр. МИАН, 2004, 246, 240–262 (preprint (2003) arXiv:math/0302304).

[Pa98] R. Pandharipande, *Rational curves on hypersurfaces [after A. Givental]*, Societe Mathematique de France, Asterisque. 252, 307–340, Exp. No.848 (1998) (preprint (1998) arXiv:math/9806133).

[SB85] J. Stienstra, F. Beukers, *On the Picard–Fuchs equation and the formal Brauer group of certain elliptic K3 surfaces*, Math. Ann, 271 (1985),269–304.

[Se00] P. Seidel, *Vanishing cycles and mutations*, Proc. 3rd European Congress of Mathematics, (Barcelona, 2000), Vol. 2, Progr. Math. 202, Birkhäuser, Basel, 2001, 65–85 (preprint (2000) arXiv:math/0007115).

[Tj98] E. Tjotta, *Rational curves on the space of determinantal nets of conics*, Doctoral Thesis (preprint (1998) arXiv:math.AG/9802037).

[Vi89] A. Vistoli, *Intersection theory on algebraic stacks and their moduli*, Inv. Math. 97 (1989), 613–670.

[Wa05a] B. Wang, *Clemens' conjecture: part I*, preprint (2005) arXiv:math/0511312.

[Wa05b] B. Wang, *Clemens' conjecture: part II*, preprint (2005) arXiv:math/0511364.