2010 г. июль — август *т. 65, вып. 4 (394)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Качественная теория динамических систем и слоений в Московской математической школе первой половины 60-х годов

С. П. Новиков

(Посвящается памяти В. И. Арнольда)

Мне хочется рассказать о своем видении этой области, которое выработалось в значительной степени благодаря взаимодействию с моим недавно скончавшимся другом Владимиром Игоревичем (“Димой”) Арнольдом. К середине 1961 года, после Ленинградского всесоюзного съезда математиков, Арнольд уже был взошедшей звездой номер 1 колмогоровской школы на мехмате МГУ: позади была и проблема из списка Гильберта (суперпозиции непрерывных функций) и возмущения вполне интегрируемых гамильтоновых систем (теория, названная КАМ). Эти области деятельности Колмогорова и его школы были далеки от меня. Но Арнольд стал активно осматриваться вокруг в математике, искать новые области. Мы были друзьями детства: еще наши родители были друзьями много лет назад. Он был на год старше меня. Начиная с его поступления на мехмат МГУ в 1954 году мы не общались. Наше общение на новом уровне началось летом 1961 года, когда я уже стал на ноги в современной алгебраической топологии, успешно входил в новую тогда дифференциальную топологию и геометрию многообразий. Мне сильно помогли твердо встать на ноги в этой области приехавшие в Ленинград на съезд в июне 1961 года западные звезды – Дж. Милнор и Ф. Хирцебрух. Для себя я начал более глубоко изучать анализ, качественную теорию динамических систем, уравнения с частными производными. Мои друзья мне помогли в этом. В качественной теории это был Д. В. Аносов. Мы и топологию изучали вместе с ним – ранее, на семинаре М. М. Постникова и на курсах А. С. Шварца.

В конце лета – начале осени 1961 года в Москву приехал С. Смейл, прямо с конференции в Киеве, где он представил свою знаменитую работу, начавшую новую эру в качественно-топологической теории многомерных динамических систем (см. книгу Аносова [1]). Прибыв в Институт Стеклова, Смейл сказал, что хочет встретится с Новиковым. Искали моего отца, который был на даче (и не нашли). Но выяснилось, что Смейл хочет встретиться со мной. Это мне помогло: ко мне в это время сильно ревновал мой официальный шеф М. Постников – я ни в чем его не хотел слушать. Его замечательные работы были уже 10 лет как позади и я считал его “исчерпанным”. На Западе вообще плохо понимают значение официального шефа для начинающего математика, студента и аспиранта, в СССР того времени – и в университетские годы, и в аспирантуре. Шеф – Ваш “собственник”; начальство действует в отношении Вас так, как он скажет, за исключением случаев особой репутации. Он “ставил меня на место”. Запрос Смейла включил меня в глазах начальства в число молодых ученых этой особой репутации, “неприкасаемых”.

© С. П. Новиков, 2010

На 2-м этаже в тогдашнем здании Стекловки (ныне ВЦ) в комнате Отдела дифференциальных уравнений мы (Аносов, Арнольд, я и, кажется, Синай) встретились со Смейлом. Это и было первое научное действие, в которое мы были вовлечены вместе с Арнольдом. Я получил от встречи со Смейлом то, что мне было нужно – недостающую информацию "с переднего фронта" и окончательное понимание того, что мое владение новой гладкой топологией находится на переднем уровне. Мне это было очень важно, находясь в изоляции в СССР, где современный уровень этой области был уже ряд лет потерян, а на Западе были грандиозные достижения. Через месяц-два после отъезда Смейла я сделал работу по классификации многомерных ($n \geqslant 5$) односвязных многообразий [2; статья № 4]. Это была моя будущая докторская диссертация [2; статья № 10]. В качестве кандидатской диссертации я представил через 2 года отдельную красивую выжимку из нее, посвященную гомотопическим группам группы диффеоморфизмов многомерных сфер [2; статьи № 7, № 20], а Арнольд стал моим оппонентом, чтобы я обучил его дифференциальной топологии.

Тогда, в 1961 году, Смейл в беседе высказал замечательную гипотезу о структурной устойчивости некоторых гамильтоновых систем (геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны) и гиперболических автоморфизмов торов. Он сказал, что в частном случае у него есть доказательство. Его попросили рассказать. Смейл представил всю схему доказательства, но острый взгляд Арнольда нашел у него пробел. Смейл уехал, сказав, что будет думать, как восполнить этот пробел. Через несколько месяцев Арнольду (вместе с Синаем) показалось, что можно заделать эту дыру. Они опубликовали об этом заметку в ДАН СССР в 1962 году [3], цитируя инициативу Смейла (по моим стандартам можно было бы цитировать и посильнее). Вскоре Аносов нашел у них дыру в заделке дыры Смейла, и эта работа исчезла с арены [4]. Дима Аносов полностью решил эту задачу, доказав гипотезу Смейла. Его красивое доказательство явно показывает роль слоений. С этого момента слоения становятся частью современной качественной теории динамических систем (их называют "аносовскими"). Сделаю два замечания к этой поучительной истории. Во-первых, Смейл сказал мне в 1967 году в США, что он, вернувшись, заделал дыру, но не опубликовал из-за того, что появился метод Аносова, который полностью покрыл весь круг этих проблем. Однако я не нашел позднее никаких подтверждений существованию альтернативного к Аносову доказательства в упомянутом частном случае, опрашивая экспертов в начале XXI века. Во-вторых, об этой ошибке Арнольда и Синая: это ошибка в технике ТФДП. Лично я далек от этой техники, но они оба вышли из первоклассной школы ТФДП – школы Колмогорова; он замечательно чувствовал ТФДП-шное доказательство. На ошибках учатся, хотя и не все. Яша Синай впоследствии, развивая теорию негладких ("биллиардного типа") систем, похожих на аносовские, демонстрировал высокий класс этой техники, да и в других работах тоже: если ошибался, то находил сам или вместе с учениками и довольно быстро. И находил мужество признать это публично. Дима Арнольд, напротив, стал быстро переходить в области, близкие к топологии, уходя от ТФДП. К сожалению, опыт не научил его осторожности, необходимости возвращаться, перепроверяя вместе с учениками еще и еще раз свои работы, выверяя полноту ТФДП-шных доказательств. Немало лет спустя другие, далекие от него люди обнаружили в его работах начала 60-х годов пробелы.

Топологические идеи нравились Арнольду; они более соответствовали его замечательному таланту, чем ТФДП; здесь понимание сути факта ближе к строгому доказательству.

Я стал посещать семинар Арнольда. В этот период он стал активно популяризировать теорию слоений. По-видимому, здесь играли роль различные факторы: и роль слоений при изучении аносовского типа систем, и работы Риба и Хефлигера по качественной теории слоений коразмерности 1, и, наконец, идейно близкие к слоениям работы Петровского и Ландиса о числе предельных циклов уравнений на плоскости

с полиномиальными правыми частями (из списка проблем Гильберта) [5]. К последней теме мы вернемся ниже. Вероятно, Петровский, к которому Арнольд стал близок, просил его в этом разобраться. Так или иначе, я сидел на семинаре Арнольда, слушал и не очень хорошо понимал эти идеи до осени 1963 года. Осенью что-то произошло у меня внутри, и я стал продумывать качественную теорию слоений коразмерности 1. Я увлекался этим все больше и больше. Наконец, я достиг заметных результатов [2; статьи № 11, № 12, № 13, № 23]. В особенности, моя теорема о замкнутом слое имела успех. Это не было гипотезой Арнольда, но несомненно, его активность подвигла меня к работе над этим. Одна из моих теорем о многообразиях, допускающих аносовские автоморфизмы, содержала дыру в доказательстве (найденную Аносовым). Ее заделать помог мне мой студент А. Брахман. Лишь после осени 1963 года, приобретя опыт работы со слоениями, я обратился к разбору работы Петровского и Ландиса о предельных циклах. Мы занялись этим вместе с Аносовым. По-видимому, это началось лишь с конца 1963 – начала 1964 годов. До этого я был вообще не готов научно, не понимал геометрии и топологии слоений. Сколько это продолжалось? Когда я впервые счел возможным встретиться с Ландисом и задать ему вопросы? Сколько раз я с ним встречался? Это трудно однозначно восстановить. Вероятно, все происходило в 1964–65 годах. Арнольд познакомился на моих лекциях с идеей трансверсальности и как с ней надо работать. Это было развито Уитни, Понтрягиным и Томом. Дифференциальные топологи знали это. В начале 60-х никто другой этого не знал. Мой курс происходил в маленькой комнате П. С. Александрова, с надписью “Убедительно прошу не курить даже в мое отсутствие”. Для людей, подобных мне, это было значительным ущемлением, но что делать? Было два моих студента (один из них – В. Голо), а также Арнольд. Он был поражен этой идеей, она ему безумно понравилась. Кажется, это была зима 1962/63 годов. Он стал это изучать, потом с помощью Петровского уехал в Париж почти на год в 1964/65 годах, где освоил эти идеи более глубоко у Р. Тома. Его позднейшие работы по особенностям общеизвестны. Мне же он оставил в наследство разбор Петровского–Ландиса – я уже был к этому готов.

Кажется, Арнольд и оставил мне текст рукописи, написанной Ландисом, но я точно не помню. Я стал работать над ним вместе с Аносовым.

Однако эта история заслуживает более последовательного рассказа. Она имела большой общественный резонанс в Московской Математике.

И. Г. Петровский – замечательный ученый и, без сомнения, лучший математик-администратор своего времени. В 50-х годах среди студентов рассказывали, что когда его фамилию принесли Сталину в 1951 году как кандидата в ректоры будущего “Храма Науки” – нового МГУ – то сказали, что он всем хорош, но не член Партии. Сталин сказал с характерным грузинским акцентом: “Ничего, мы его перевоспитаем, если будет нужно”, и подписал назначение. Много позднее я узнал, что представлял кандидатов Берия. Петровский был известен, в частности, соединением методов алгебраической геометрии, анализа и дифференциальных уравнений. По-видимому, он правильно понял еще в 40-х годах, что вывод понятия “предельный цикл” в комплексную область ведет к тому, что мы сейчас называем “топологией слоений”. Он решил применить это к проблеме Гильберта и пригласил для работы хорошего математика Ландиса (которому его учитель Кронрод делал бешеную рекламу). По-видимому, Петровский был отвлечен после 51 года на гигантскую административную деятельность, важную для всех нас. Он возродил мехмат из руин. Ландису показалось, что он может успешно завершить идеи Петровского – и они написали работу, опубликованную в 1957 году [6]. Кронрод ходил по Москве и говорил: “Последний результат Петровского, полученный Ландисом”. Будучи учителем, в частности, Витушкина и Ландиса, он был агрессивен, талантлив и неумен. Эта последняя черта способствовала разрушению некоторых его чрезвычайно ценных начинаний в вычислительном деле.

Около 1960 года возникла идея присудить Петровскому и Ландису Ленинскую Премию за эту работу. Однако Понтрягин сказал в Комитете, что эта работа не проверена. Я слышал это от отца тогда же. Вообще, Понтрягин и Петровский всегда были сильно недружественны, но здесь Понтрягин был прав. Так или иначе, Арнольд, как мне кажется, начал изучать эти работы не без просьбы со стороны Петровского в начале 60-х годов, как я уже говорил выше. Затем с конца 1963 года он передал эстафету мне (а я пригласил Аносова). Года два мы периодически возвращались к этому. Однако с Ландисом встречался я один. Раз за разом он готовил новые тексты. Никаких других участников этого я не припомню.

Это был длинный процесс. К сожалению, большинство математиков, включая моего друга Аносова, избегают ситуаций, где возникает публичное противостояние (Арнольд был в числе немногих, не боящихся этого, и я в нем это очень ценил). Оглядываясь назад, я вспоминаю, что у меня было впечатление, что Ландису кто-то помогал, но тогда я не понимал кто именно. Возможно, что просто-напросто происходило сокрытие ошибки. Стало ясно, что король – голый: никаких аргументов для оценки числа предельных циклов сверху в этой работе нет. Ничего нет, кроме идей теории слоений. Я стал об этом говорить достаточно публично. Ландис – очень хороший математик и симпатичный человек. Он принимал у меня вступительный экзамен по математике на мехмат в 1955 году. Однако, делать было нечего: он попросту запутался в чуждой ему области. Он – сильный специалист в тонких вопросах теории уравнений с негладкими коэффициентами и прочих вопросах ТФДП, но здесь было совсем другое. Через некоторое время он сообщил Петровскому, что работа ошибочна. Был тогда слух, что он сказал Петровскому, что ошибка найдена им вместе с его учеником Ильяшенко. Однако Петровский узнал (возможно, от Гельфанда), что я (или, точнее, мы с Аносовым) пришли к этому выводу. Гельфанд был предан Петровскому. Он очень нервно спросил меня где-то в 1965–66 годах, и я ему четко сказал о сложившейся ситуации. Никаких докладов об этом на его семинаре я не делал. У нас с Гельфандом образовалось начиная с 1963 года растущее глубокое научное взаимопонимание. Он понял, что делать здесь нечего – и, надо полагать, сказал Петровскому.

Петровский пригласил меня к себе и уговаривал заняться этой проблемой и довести ее до конца. Я сказал ему так: “Никаких зацепок для оценки сверху числа циклов я не вижу. Пройдет 50 лет, пока эта проблема решится”. Петровский всегда меня поддерживал. Он был человек великий.

Кстати, 50 лет уже будет скоро, а сдвигов не видно. Лет 10–15 спустя Арнольд предложил интересную идею оценки числа циклов в окрестности вполне интегрируемых систем, считая, что именно здесь их, вероятно, максимальное число. Его ученики Петров и Варченко выполнили интересные работы на эту тему, но даже в этом случае оценка очень неэффективна.

В 1967 году появилось письмо Петровского и Ландиса, где было признано, с указанием на меня, что теоремы нет [7].

Дополнение.
Несколько вопросов к С. П. Новикову

(вопросы задал В. М. Бухштабер)

В. М. Бухштабер: *Сергей Петрович, в Полит.ру* (*см.* http://www.polit.ru/science/2009/07/14/ilyashenko1.html) *опубликовано интервью с Ю. С. Ильяшенко. Вот отрывок из этого интервью, в котором говорится о работе Петровского–Ландиса и о Вас*:

> “С другой стороны, мои собственные отношения с дифференциальными уравнениями, были несколько специфичны. Я начал заниматься в университете

одновременно у В. И. Арнольда и у Е. М. Ландиса. Евгений Михайлович Ландис в это время писал книгу, посвященную решению 16-й проблемы Гильберта, которое было им найдено вместе с И. Г. Петровским (ректором МГУ с 1951 по 1973 г.) и которое позже оказалась неверным...

И пройдя год или полтора такого обучения я оказался, волею судеб, вовлечен в передоказательство и переоткрытие работы Ландиса–Петровского. И когда я был на 3-м курсе, весной 1963 г., мой процесс переоткрытия зашел в тупик. Я увидел, что не понимаю и по указаниям Ландиса не могу переоткрыть какой-то кусочек из их работы с Петровским. Я пришел к Е. М., сказал об этом, он стал пытаться давать ответ, задумался и не дал сразу ответа. После этого у нас с ним происходили регулярные беседы, в ходе которых он пытался дать новое доказательство, но я и в нем находил погрешность...

В то время, в 1963 г., у Арнольда, Новикова, Шафаревича был очень большой интерес к работе Петровского–Ландиса, ее разбирали на нескольких семинарах. Молодой Сергей Петрович Новиков рассказывал о ней на семинаре И. М. Гельфанда, это было уже осенью 1963 г.

Корреспондент: *Это было свежее доказательство*?

Это доказательство было написано в неопубликованной книге Ландиса и Петровского. Два раза Новиков рассказывал вещи, которые я хорошо знал и которые были верны, а на третьем докладе он должен был рассказывать вещь неверную. Я нему подошел перед докладом сказал: "Сережа, в том, что Вы хотите рассказывать, есть такая-то ошибка". Он тогда был аспирантом, а я студентом, и я к нему обращался по имени, но он моего имени не знал. Он за минуту понял, в чем дело, кивнул, и когда начался семинар, Новиков, прохаживаясь, сказал: "Вот, мы посмотрели и увидели, что здесь есть ошибка". Гельфанд спросил: Кто "мы"? Новиков сказал: "Вот мы" и показал на аудиторию. Большая поточная аудитория была полна. Гельфанд посмотрел в аудиторию и еще раз спросил: "Кто мы?" "Вот мы", – сказал Новиков. "Кто мы?" – опять спросил Гельфанд, уже начиная накаляться. Новиков просто не знал, как меня зовут, он показывал в аудиторию, где я сидел, но народ сидел густо. На третий или четвертый раз И. М. Гельфанд догадался повернуться к аудитории и спросить: "Кто мы?". И тогда я, робея, встал и представился.

Корреспондент: *Вы были единственным, кто нашел ошибку? За все эти годы, с момента появления доказательства, никто ее не обнаружил*?

Нет. И потом уже сам Новиков парировал все попытки Ландиса спасти доказательство, и когда в 1967 г. авторы отозвали свое доказательство, то в письме в "Математический сборник" Новиков был назван человеком, нашедшим ошибку, потому что он был в это время уже всемирно известным ученым, а я всего лишь аспирантом, не имевшим никаких достижений, и было бы просто неприлично, если бы в этом письме стояли два наших имени..."

Вопрос 1. *Что Вы об этом скажете*?

Ответ: Поэтическая фантазия Юлика Ильяшенко уносит его далеко от реальных фактов. Никаких докладов на семинаре Гельфанда на эту тему я никогда не делал. В 1963 году я еще не успел даже освоить тему; термин "Мы" Юлик, возможно, услышал от меня, но позже – имелся в виду, конечно, Аносов, но он вместо Аносова подставляет себя. В частности, примерно в 1965 году я говорил Гельфанду, что мы с Аносовым над этим работали. Разговор происходил публично перед семинаром Гельфанда, т. е. в аудитории 14-08 или рядом, многие могли слышать. Видимо Гельфанд информировал (хотя, возможно, и не сразу) Петровского, которому он был близок.

Вообразите картину, нарисованную Ильяшенко: “Безымянный студент подкрадывается ко мне, чтобы сообщить узловую ошибку в знаменитой работе своего шефа. Я же с полуслова все сразу понял и немедленно пустил в ход под своим именем.” Эта сцена заслуживает экранизации. В CV Ильяшенко в интернете фамилии его официального научного руководителя не указано. Сообщаю: им был Ландис, а не Арнольд. Это и был его “шеф”. Как Вы думаете: все зная об ошибке с 1963 г., обсуждая ее очень приватно со своим шефом, он начал выносить ее наружу и при этом тайком от Ландиса? Ну конечно же, Ильяшенко Ландиса не предавал. А почему Петровский этого не знал до 1967 года? Либо ничего этого попросту не было, либо они с Ландисом вместе это скрывали, пока от меня это не стало широко известно. Письмо Петровского и Ландиса поступило в “Мат. сборник” 21 марта 1967 г. со ссылкой на меня, когда Петровский это узнал. Это несомненно.

Последний абзац, приводимый здесь из интервью Ильяшенко, очень меня огорчил. Он обвиняет Петровского в нарушении научной этики: по его словам, его имя из текста письма, где признавалась ошибка, было удалено, так как он был еще молод и недостаточно авторитетен в науке. Я заявляю, что никогда ничего подобного Иван Георгиевич Петровский не допускал. Конечно, он мог возмутиться, считая, что Ландис и Ильяшенко скрывали от него провал этой работы, узнав, что об этом уже говорят публично. Однако Петровский взял его на кафедру после окончания аспирантуры при этом, а благодарности не видно. Что поделаешь, каждое доброе дело наказывается, как говорят философы.

Мне уже доводилось в последнее время в разных редколлегиях поправлять весьма тенденциозную поэтическую деформацию реальных фактов со стороны Юлика Ильяшенко. Во всех этих случаях речь шла о сокрытии ошибок близких ему людей. Многие не понимают, что это является нарушением научной этики против тех ученых, которые завершили правильное решение соответствующей проблемы. В тексте интервью он произвольно использует мою фамилию, вставляя ее в сюжеты, сотворенные его фантазией. Поэтому я вынужден ему ответить.

Вопрос 2. *Что Вы скажете о много более поздней работе Ильяшенко* (*около* 1990 *года*), *посвященной доказательству теоремы Дюлака конечности числа предельных циклов*?

Ответ: Да, я об этом слышал. Учтите, что более 40 лет я к этой теме не возвращался, так что я могу не иметь какой-то важной информации. Если общей оценки числа циклов для всех систем данной степени нет, то эта проблема сводится к тонкому анализу глубоко вырожденных ситуаций. Ильяшенко представил доказательство на несколько сот страниц текста. Его французские конкуренты независимо представили доказательство, идейно другое и в несколько раз более короткое, но все же их текст превышает сто страниц. Я не могу ответить Вам на следующий основной вопрос: есть ли свидетельство того, что эти доказательства проверены Мировым Математическим Сообществом? Используют ли их методы другие ученые? Излагают ли их в лекционных курсах? Когда такие свидетельства будут, я скажу, что это очень хорошие работы – разумеется, только о том доказательстве, которое проверено.

Список литературы

[1] Д. В. Аносов, *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны*, Тр. МИАН СССР, **90**, Наука, М., 1967, 211 с.

[2] С. П. Новиков, Персональная страница, публикации, `http://www.mi.ras.ru/~snovikov`.

[3] В. И. Арнольд, Я. Г. Синай, “О малых возмущениях автоморфизмов тора”, *Докл. АН СССР*, **144**:4 (1962), 695–698; англ. пер.: V. I. Arnol'd, Ya. G. Sinai, “Small

perturbations of the automorphisms of the torus", *Sov. Math. Dokl.*, **3** (1962), 783–787.

[4] В. И. Арнольд, Я. Г. Синай, "Поправка", *Докл. АН СССР*, **150**:5 (1963), 958.

[5] И. Г. Петровский, Е. М. Ландис, "О числе предельных циклов уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где P и Q – многочлены 2-й степени", *Матем. сб.*, **37(79)**:2 (1955), 209–250.

[6] Е. М. Ландис, И. Г. Петровский, "О числе предельных циклов уравнения, где $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, P и Q – полиномы", *Матем. сб.*, **43(85)**:2 (1957), 149–168.

[7] Е. М. Ландис, И. Г. Петровский, "Письмо в редакцию", *Матем. сб.*, **73(115)**:1 (1967), 160; англ. пер.: E. M. Landis, I. G. Petrovskii, "Letter to the Editors", *Math. USSR-Sb.*, **2**:1 (1967), 141.