

# Категориальные грамматики

## Лекция 6 (23.03.2016). Часть 2

### Грамматики Ламбека и контекстно-свободные грамматики

Степан Кузнецов, Мати Пентус, Алексей Сорокин

МГУ им. М. В. Ломоносова, межфакультетский курс,  
весенний семестр 2015/2016 учебного года

## Теорема

Если формальный язык можно задать грамматикой Ламбека, то его также можно задать контекстно-свободной грамматикой.

## Пример

Грамматика Ламбека.

синт. тип	простейшие выражения
$np \setminus s$	works, sleeps
$np$	John, this
$n$	idea
$np/n$	the, this
$n/n$	green, colourless

Грамматически корректное предложение.

This colourless green idea sleeps.  
 $(np/n), (n/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s$

## Определение

*Длиной* типа называется число вхождений примитивных типов.

## Пример

$$\|np\| = 1$$

$$\|n\| = 1$$

$$\|np \setminus s\| = 2$$

$$\|np / n\| = 2$$

$$\|n / n\| = 2$$

$$\|(np \setminus s) / np\| = 3$$

$$\|s / (np \setminus s)\| = 3$$

Соответствующая контекстно-свободная грамматика.

$$\Sigma = \{\text{works, sleeps, John, idea, the, this, green, colourless}\}$$

$$N = \{s, n, np, (s \setminus s), (s \setminus n), (s \setminus np), (n \setminus s), (n \setminus n), (n \setminus np), (np \setminus s), (np \setminus n), (np \setminus np), (s/s), (s/n), (s/np), (n/s), (n/n), (n/np), (np/s), (np/n), (np/np), (s \cdot s), (s \cdot n), (s \cdot np), (n \cdot s), (n \cdot n), (n \cdot np), (np \cdot s), (np \cdot n), (np \cdot np)\}$$

$s \mapsto s (s \setminus s)$	$(np \setminus s) \mapsto \text{works}$
$s \mapsto n (n \setminus s)$	$(np \setminus s) \mapsto \text{sleeps}$
$s \mapsto np (np \setminus s)$	$np \mapsto \text{John}$
$s \mapsto (s/s) s$	$n \mapsto \text{idea}$
$s \mapsto (s/n) n$	$(np/n) \mapsto \text{the}$
$s \mapsto (s/np) np$	$(np/n) \mapsto \text{this}$
$\vdots$	$np \mapsto \text{this}$
$n \mapsto (n/n) n$	$(n/n) \mapsto \text{green}$
$np \mapsto (np/n) n$	$(n/n) \mapsto \text{colourless}$
$(n/n) \mapsto (n/n) (n/n)$	
$\vdots$	
$(np \cdot np) \mapsto np np$	
$(np \cdot np) \mapsto (np/np) (np \cdot np)$	

(Всего 144 правила.)

$s \mapsto s (s \backslash s)$	$(np \backslash s) \mapsto \text{works}$
$s \mapsto n (n \backslash s)$	$(np \backslash s) \mapsto \text{sleeps}$
$s \mapsto np (np \backslash s)$	$np \mapsto \text{John}$
$s \mapsto (s/s) s$	$n \mapsto \text{idea}$
$s \mapsto (s/n) n$	$(np/n) \mapsto \text{the}$
$s \mapsto (s/np) np$	$(np/n) \mapsto \text{this}$
$\vdots$	$np \mapsto \text{this}$
$n \mapsto (n/n) n$	$(n/n) \mapsto \text{green}$
$np \mapsto (np/n) n$	$(n/n) \mapsto \text{colourless}$
$(n/n) \mapsto (n/n) (n/n)$	
$\vdots$	
$(np \cdot np) \mapsto np np$	
$(np \cdot np) \mapsto (np/np) (np \cdot np)$	

$s \mapsto np (np \backslash s) \mapsto (np/n) n (np \backslash s) \mapsto (np/n) (n/n) n (np \backslash s) \mapsto$   
 $\mapsto (np/n) (n/n) (n/n) n (np \backslash s) \mapsto \dots \mapsto \text{this colourless green idea sleeps}$

Аксиомы и правила исчисления Ламбека.

$$A \rightarrow A$$

$$\frac{\Phi \rightarrow B \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow A}{\Gamma, \Phi, \Delta \rightarrow A} \text{ (cut)}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow (A \setminus B)} \text{ } (\rightarrow \setminus) \text{ (если } \Pi \text{ непуста)}$$

$$\frac{\Phi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Phi, (A \setminus B), \Delta \rightarrow C} (\setminus \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow (B/A)} (\rightarrow /) \text{ (если } \Pi \text{ непуста)}$$

$$\frac{\Phi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, (B/A), \Phi, \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Delta \rightarrow B}{\Gamma, \Delta \rightarrow (A \cdot B)} (\rightarrow \cdot)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, (A \cdot B), \Delta \rightarrow C} (\cdot \rightarrow)$$

Если секвенция  $\Gamma \rightarrow A$  выводится в исчислении Ламбека, то пишут  $\mathbb{L} \vdash \Gamma \rightarrow A$ .



## Теорема (Ламбек, 1958)

Любую секвенцию, выводимую в исчислении Ламбека, можно вывести без использования правила (cut).

### Пример

$$\frac{\frac{\dots}{(n/n), n \rightarrow n} \quad np \rightarrow np}{(np/n), (n/n), n \rightarrow np} (/ \rightarrow) \quad \frac{\dots}{np, ((np \setminus s)/np), np \rightarrow s} \text{ (cut)}$$

$$np, ((np \setminus s)/np), (np/n), (n/n), n \rightarrow s$$

John visits a strange city.

$$\frac{\dots \quad \frac{np \rightarrow np \quad \frac{\dots}{np, ((np \setminus s)/np), np \rightarrow s} \text{ (cut)}}{np, ((np \setminus s)/np), np \rightarrow s} (/ \rightarrow)}{np, ((np \setminus s)/np), (np/n), (n/n), n \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{\frac{\dots}{(n/n), n \rightarrow n} \quad \frac{\dots}{np, ((np \setminus s)/np), np \rightarrow s}}{np, ((np \setminus s)/np), (np/n), (n/n), n \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$



Вывод с сечением.

$$\begin{array}{c}
 \frac{n \rightarrow n \quad n \rightarrow n}{(n/n), n \rightarrow n} \quad \frac{n \rightarrow n \quad n \rightarrow n}{(n/n), n \rightarrow n} \quad \frac{\frac{n \rightarrow n \quad np \rightarrow np}{(np/n), n \rightarrow np} \quad \frac{np \rightarrow np \quad s \rightarrow s}{np, (np \setminus s) \rightarrow s}}{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} \text{ (cut)} \\
 \frac{\frac{n \rightarrow n \quad n \rightarrow n}{(n/n), n \rightarrow n} \quad \frac{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s}{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} \text{ (cut)}}{(np/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} \text{ (cut)} \\
 \frac{\frac{(n/n), n \rightarrow n \quad (np/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s}{(np/n), (n/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} \text{ (cut)}}{(np/n), (n/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} \text{ (cut)}
 \end{array}$$

Результат устранения сечения.

$$\begin{array}{c}
 \frac{n \rightarrow n \quad \frac{\frac{np \rightarrow np \quad s \rightarrow s}{np, (np \setminus s) \rightarrow s} (\setminus \rightarrow)}}{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow) \\
 \frac{n \rightarrow n \quad \frac{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s}{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)}{(np/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow) \\
 \frac{n \rightarrow n \quad \frac{(np/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s}{(np/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)}{(np/n), (n/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)
 \end{array}$$

## Определение

Секвенция называется *тонкой*, если каждый встречающийся в ней примитивный тип встречается там ровно два раза.

## Теорема

*Если секвенция выводима, то она получается из некоторой тонкой выводимой секвенции путём переименования примитивных типов.*

## Пример

Секвенцию

$$(np/n), (n/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s$$

можно получить из тонкой секвенции

$$(np/n), (n/r), (r/q), q, (np \setminus s) \rightarrow s.$$

$$\frac{n \rightarrow n}{(np/n), (n/n), (n/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{n \rightarrow n}{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{n \rightarrow n \quad \frac{np \rightarrow np \quad s \rightarrow s}{np, (np \setminus s) \rightarrow s} (\backslash \rightarrow)}{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{q \rightarrow q}{(np/n), (n/r), (r/q), q, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{r \rightarrow r}{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{n \rightarrow n \quad \frac{np \rightarrow np \quad s \rightarrow s}{np, (np \setminus s) \rightarrow s} (\backslash \rightarrow)}{(np/n), n, (np \setminus s) \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$

## Пример

$np$	John, that, petrol
$np/n$	the, that
$n$	saw, petrol, canister, can
$n/n$	saw, petrol, canister, can
$np \setminus s$	leaked
$(np \setminus s) / np$	saw
$t$	that
$((np \setminus s) / s) / t$	saw
$i$	leak
$i / np$	see, saw
$(np \setminus s) / i$	can
$((np \setminus s) / i) / np$	saw

John            saw                    the            canister.

$np, ((np \setminus s) / np), (np / n), n \rightarrow s$

Petrol            can            leak.

$np, ((np \setminus s) / i), i \rightarrow s$

## Пример

$np$	John, that, petrol
$np/n$	the, that
$n$	saw, petrol, canister, can
$n/n$	saw, petrol, canister, can
$np \setminus s$	leaked
$(np \setminus s) / np$	saw
$t$	that
$((np \setminus s) / s) / t$	saw
$i$	leak
$i / np$	see, saw
$(np \setminus s) / i$	can
$((np \setminus s) / i) / np$	saw

John                      saw                      that petrol leaked.  
 $np, (((np \setminus s) / s) / t), t, np, (np \setminus s) \rightarrow s$

John                      saw                      the canister leak.  
 $np, (((np \setminus s) / i) / np), (np / n), n, i \rightarrow s$

## Задача

$np$	John, that, petrol
$np/n$	the, that
$n$	saw, petrol, canister, can
$n/n$	saw, petrol, canister, can
$np \setminus s$	leaked
$(np \setminus s) / np$	saw
$t$	that
$((np \setminus s) / s) / t$	saw
$i$	leak
$i / np$	see, saw
$(np \setminus s) / i$	can
$((np \setminus s) / i) / np$	saw

Какая выводимая секвенция позволяет установить корректность следующего предложения?

John saw that petrol can leak.