Дискретная математика, пилотный поток. Решения задач экзамена 30.03.18

1. Про множества A, B и C известно, что множество $(A\cup B)\setminus C$ континуально, $(A\cup C)\setminus B$ континуально, а $(B\cup C)\setminus A$ счетно. Может ли множество $B\cup C$ быть счетным? Если может, приведите пример, если не может — докажите это.

Решение. *Ответ*: Может.

В качестве примера можно взять попарно непересекающиеся множества A, B и C, такие что B и C счетны, а A — континуально. Тогда множества $(A\cup B)\setminus C = A\cup B$ и $(A\cup C)\setminus B = A\cup C$ континуальны (добавление к бесконечному множеству счетного не меняет мощности бесконечного множества). А множество $(B\cup C)\setminus A = B\cup C$ счетно (как объединение счетных множеств).

2. Неориентированный путь состоит из вершин $v_0, v_1, \ldots, v_4$. Вершины пути равновероятно и случайно красятся в 4 цвета. Найдите вероятность того, что все вершины, находящиеся на расстоянии 1 или 2, покрашены в разные цвета.

Решение. *Ответ*: 3/32.

Каждую из пяти вершин можно покрасить в один из четырех цветов, так что всего раскрасок 4^5. Подсчитаем число раскрасок, таких что все вершины, находящиеся на расстоянии 1 или 2, покрашены в разные цвета.

Вершину v_0 можно покрасить в любой из 4 цветов. Для каждой поскраски вершины v_0 вершину v_1 можно покрасить в 3 цвета (цвет вершины v_0 использовать нельзя). Каждую следующую вершину можно покрасить в 2 цвета при всякой раскраске предыдущих вершин (нельзя использовать цвета двух предыдущих вершин и эти цвета различны). По правилу произведения число интересующих нас раскрасок равно $4\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2$.

Таким образом, искомая вероятность
$$\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{4^5} = \frac{3}{32}.$$

3. Пусть X и Y — конечные множества. Даны две всюдуопределенные функции $f, g\colon X \to Y$. Известно, что f является инъекцией, а g — сюръекцией. Верно ли, что для всякого $A \subseteq X$ выполняется $|g^{-1}(f(A))| \geq |A|$? Если не верно, приведите пример f, g и A, для которых неравенство не верно. Если верно — докажите это.

Решение. *Ответ*: Верно.

Рассмотрим произвольное $A \subseteq X$. Поскольку f — инъекция, то для всех $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 \neq x_2$, выполняется $f(x_1) \neq f(x_2)$. Следовательно, $|f(A)| = |A|$. Далее, поскольку g — сюръекция, то для всякого $y \in f(A)$ существует x, такой что $g(x) = y$. Поскольку g — функция, то различным $y \in f(A)$ соответствуют разные $x \in X$, такие что $g(x) = y$. Следовательно, $|g^{-1}(f(A))| \geq |f(A)|$. В итоге получаем $|g^{-1}(f(A))| \geq |f(A)| = |A|$, что и требовалось.

4. Сколько существует упорядоченных пар (x, y) остатков по модулю 11, таких что $x^2 \equiv y^2 \pmod{11}$?

Решение. *Ответ*: 21.

Если $y = 0$, то x должен удовлетворять уравнению $x^2 \equiv 0 \pmod{11}$. То есть, x^2 должно делиться на 11, и в силу простоты числа 11 сам x тоже должен делиться на 11. Так что для $y = 0$ годится один остаток $x = 0$.

Зафиксируем теперь y произвольным ненулевым остатком. Уравнение можно преобразовать к виду $(x-y)(x+y) \equiv 0 \pmod{11}$. То есть, $(x-y)(x+y)$ делится на 11. В силу простоты числа 11 отсюда следует, что $(x-y)$ или $(x+y)$ делится на 11. То есть, $x \equiv y \pmod{11}$ или $x \equiv -y \pmod{11}$, причем в силу нечетности числа 11 верно $y \not\equiv -y \pmod{11}$. Таким образом, для всякого ненулевого остатка y годятся ровно два различных остатка $x \equiv y, x \equiv -y \pmod{11}$. Всего получаем $1 + 10 \cdot 2 = 21$ пар остатков, удовлетворяющих $x^2 \equiv y^2 \pmod{11}$.

5. Разрешимо ли множество описаний МТ, которые на всех входах выдают ответ, причем на всех входах один и тот же? (В этой задаче требующиеся алгоритмы можно описывать неформально, не обязательно строить машину Тьюринга.)

Решение. *Ответ*: Неразрешимо.

Рассмотрим свойство вычислимых функций “быть константой”:

$$\mathcal{A} = \{f\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* \mid f \text{ вычислима и } \exists C \in \{0,1\}^*\ \forall x \in \{0,1\}^*\ f(x) = C\}.$$

Это нетривиальное свойство и как обсуждалось в курсе по теореме Райса-Успенского множество машин Тьюринга, вычисляющих функции из $\mathcal{A}$ неразрешимо. А это и есть рассматриваемое множество машин Тьюринга.

6. При изготовлении ожерелья используют 6 белых и 6 чёрных бусинок. Их надевают на нить в случайном порядке (все расстановки бусин на нити равновероятны), после чего концы нити завязывают и все бусины оказываются расположены по кругу. Найдите математическое ожидание числа чёрных бусин, обе соседние бусины которых белые.

Решение. *Ответ*: $\frac{18}{11}$.

Обозначим случайную величину, равную числу черных бусин, обе соседние бусины которых белые, через X. Для всякого $i = 1, \ldots, 12$ рассмотрим дополнительную случайную величину

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ая бусина черная, а две соседние бусины белые,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь i-ая бусина – это бусина, которую надели на нить i-ой, а под соседними бусинами понимаются бусины, которые оказались соседними после завязывания нити. Тогда нетрудно видеть, что $X = \sum_{i=1}^{12} X_i$: и левая, и правая часть равенства равна количеству чёрных бусин, обе соседние бусины которых белые.

Вычислим матожидание X_i. Общее число способов надеть бусины на нить равно $\binom{12}{6}$ (нужно выбрать 6 позиций из 12 для черных бусин, остальные позиции занимают белые бусины). Для того, чтобы выполнялось $X_i = 1$, нужно, чтобы i-ая бусина была черной, а две соседние бусины были белые. Остальные бусины могут быть распределены произвольно и есть $\binom{9}{4}$ способов расставить оставшиеся бусины (нужно выбрать 4 из 9 оставшихся позиций для белых бусин).

Таким образом,

$$\mathrm{E}[X_i] = \Pr[X_i = 1] = \frac{\binom{9}{4}}{\binom{12}{6}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{3}{22}.$$

Тогда по линейности матожидания

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{12} \mathrm{E}[X_i] = \frac{12 \cdot 3}{22} = \frac{18}{11}.$$

7. Пусть функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислима и множество $D = \{n \mid f(n) \text{ — определена}\}$ неразрешимо. Докажите, что существует число $C \in \mathbb{N}$, такое что функция

$$g_C(n) = \begin{cases} f(n), & \text{если } f(n) \text{ определена,} \\ C, & \text{иначе,} \end{cases}$$

не вычислима. (В этой задаче требующиеся алгоритмы можно описывать неформально, не обязательно строить машину Тьюринга.)

Решение. Рассмотрим функции g_0 и g_1 для $C = 0$ и $C = 1$ соответственно, и докажем, что одна из них невычислима. Пусть, от противного, они обе вычислимы. Тогда вычислима и функция $h(n) = 1 - g_1(n) + g_0(n)$. Заметим, что при $n \in D$ верно $g_1(n) = g_0(n)$ и $h(n) = 1$, а при $n \notin D$ верно $g_0(n) = 0$, $g_1(n) = 1$ и $h(n) = 0$. Таким образом, h является характеристической функцией множества D, и раз она вычислима, то D разрешимо. Противоречие.

8. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ рассмотрим булеву функцию

$$f_k(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\}} x_i.$$

Постройте булеву схему размера $O(n)$, вычисляющую все функции $f_1, \ldots, f_n$ (таким образом, у схемы должно быть n выходов).

Решение. Сначала последовательно для всех $k = 1, \ldots, n-1$ вычислим функции

$$g_k(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{k} x_i.$$

Каждую следующую функцию можно вычислить с помощью одной операции конъюнкции $g_{k+1} = g_k \wedge x_{k+1}$. Так что на вычисление всех функций потребуется $n-2$ операции ($g_1 = x_1$ и на ее вычисление операция не тратится).

Аналогично для всех $k = n, \ldots, 2$ последовательно вычислим функции

$$h_k(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i=k}^{n} x_i$$

с помощью операций $h_{k-1} = h_k \wedge x_{k-1}$. Для этого также потребуется $n-2$ операции.

Заметим, что функции f_1 и f_n уже вычислены, поскольку $f_1 = h_2$ и $f_n = g_{n-1}$. Оставшиеся функции f_k для $k = 2, \ldots, n-1$ мы теперь также можем легко вычислить: $f_k = g_{k-1} \wedge h_{k+1}$. Для этого также нужно $n-2$ операции.

Мы построили схему с $3n - 6 = O(n)$ элементами, вычисляющую все функции $f_1, \ldots, f_n$.