Дискретная математика, пилотный поток. **Решения задач экзамена 26.12.17**

1. Про множества A, B, C известно, что симметрическая разность любых двух из них содержит третье. Верно ли, что какие-то два из этих множеств не пересекаются?

Решение. *Ответ*: неверно.

Достаточно привести пример трех множеств, таких что симметрическая разность любых двух содержит третье и при этом любые два множества пересекаются. Рассмотрим такие множества: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3\}$. Тогда получаем $A \triangle B = C$, $A \triangle C = B$, $B \triangle C = A$ и любые два из этих множеств пересекаются.

2. Пусть $A = \{1, \dots, 5\}$. Найдите количество всюду определенных функций $f\colon A \to A$, таких что для всякого $x \in \{1, 2, 3\}$ верно $f(x) \in \{1, 2\}$. Ответом на вопрос задачи должно быть число в десятичной записи.

Решение. *Ответ*: 200

На аргументах 1, 2 и 3 функция может принимать любое из двух значений 1 и 2. На аргументах 4, 5 функция может принимать любое из пяти значений $1, 2, 3, 4, 5$. По правилу произведения выбрать все пять значений функции можно $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 200$ способами.

3. Существуют ли такое конечное вероятностное пространство, вероятностная мера на нем и события A и B, такие что $\Pr[A] > 0$, $\Pr[B] > 0$ и события A и B являются одновременно и независимыми, и несовместными?

Решение. *Ответ*: Не существуют.

Несовместность событий A и B по определению означает, что $\Pr[A \cap B] = 0$. Независимость событий A и B по определению означает, что $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$, что положительно в силу положительности $\Pr[A]$ и $\Pr[B]$. Таким образом, одно из условий означает, что $\Pr[A \cap B] = 0$, а из второго следует, что $\Pr[A \cap B] > 0$, и два эти условия не могут выполняться одновременно.

4. Существует ли множество A и отношение $R \subseteq A \times A$, такие что отношение $R \circ R$ транзитивно, а отношение R — не транзитивно?

Решение. *Ответ*: Существует.

Рассмотрим множество $A = \{1, 2, 3\}$ и отношение $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$. Тогда отношение R не транзитивно, поскольку $(1, 2) \in R$, $(2, 3) \in R$, а $(1, 3) \notin R$.

Отношение $R \circ R$ тогда равно $\{(1, 3)\}$, и оно является транзитивным, поскольку троек a, b, c, для которых выполнено $(a, b), (b, c) \in R \circ R$ нет.

5. Обозначим через $\mathbb{R}_+$ множество (строго) положительных действительных чисел, а через $\mathbb{R}_-$ – множество (строго) отрицательных действительных чисел. Изоморфны ли следующие порядки: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ с покоординатным порядком и $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$ с покоординатным порядком?

Решение. *Ответ*: Изоморфны.

Рассмотрим такую функцию на парах чисел $f(x, y) = (-e^{-x}, \log_2 y)$. По каждой координате функция зависит от одной переменной и монотонно возрастает. По первой координате функция является биекцией между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_-$, по второй координате – биекцией между $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}$. Таким образом, f является биекцией между $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$ и сохраняет покоординатный порядок.

6. Рассмотрим все такие подмножества A натуральных чисел, что для всех $i, j \in A$, таких что $i \neq j$, верно $|i - j| \geq 2$. Какова мощность множества всех таких подмножеств?

Решение. *Ответ*: Это множество континуально.

Обозначим рассматриваемое в задаче множество подмножеств через B. В курсе доказывалось, что множество всех подмножеств натуральных чисел континуально, это дает нам инъекцию нашего множества в континуальное.

В обратную сторону, рассмотрим множество всех бесконечных двоичных последовательностей из 0 и 1. Доказывалось, что это множество континуально. Для каждой последовательности $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$ рассмотрим множество $A_x = \{2 \cdot k \mid x_k = 1\}$. Множество A_x состоит только из четных чисел, так что разность любых двух его элементов не меньше двух, и $A + x \in B$. При этом, если $x \neq x'$, то $A_x \neq A_{x'}$. Таким образом, мы построили инъекцию из континуального множества в B.

По теореме Кантора-Бернштейна из существования двух инъекций следует существование биекции, и множество B континуально.

7. Дан простой неориентированный двудольный граф G, вершины которого поделены на доли A и B. Паросочетанием называется любое подмножество ребер в графе, никакие два ребра в котором не имеют общих концов. Паросочетание покрывает вершину графа, если оно содержит ребро, смежное этой вершине. В G есть два паросочетания. Докажите, что есть третье, которое покрывает все вершины первого паросочетания из доли A и все вершины второго паросочетания из доли B.

Решение.

Рассмотрим подграф H графа G, состоящий из всех вершин G и всех ребер, входящих в хотя бы одно из двух паросочетаний. Каждая вершина смежна не более чем одному ребру в каждом из паросочетаний, так что степень каждой вершины в H не больше двух. Рассмотрим отдельно каждую компоненту связности H. Поскольку степени вершин в каждой компоненте связности не больше 2, то это либо путь, либо цикл.

Будем строить новое паросочетание. В него мы будем включать только ребра из H. Опишем нужное множество ребер в каждой компоненте связности отдельно.

Пусть компонента связности является циклом. Заметим, что в паросочетаниях из условия задачи нет смежных ребер, так что ребра двух паросочетаний в цикле чередуются. Таким образом, цикл имеет четную длину. Возьмем в новое паросочетание каждое второе ребро из цикла. Тогда все вершины этой компоненты связности будут покрыты новым паросочетанием.

Пусть компонента связности является путем, обозначим его длину через k (длина — число ребер в пути). Перенумеруем ребра пути числами от 1 до k по порядку, начиная с одного из концов. Если k нечетно, то возьмем в новое паросочетание ребра с номерами $1, 3, \dots, k$. Тогда вновь мы покрыли новым паросочетанием все вершины компоненты связности.

Пусть k четно. Заметим, что вершины долей A и B в графе чередуются. При этом вершин в пути нечетно, так что оба конца лежат в одной доле. Пусть для определенности это доля A. Тогда возьмем в новое паросочетание все ребра из первого сочетания в этой компоненте. Тогда единственная непокрытая вершина в этой компоненте – это концевая вершина из A, смежная с ребром из второго паросочетания. Но ее и не требовалось покрыть.

Объединяя паросочетание со всех компонентах получаем требуемое паросочетание в графе G.

8. На неориентированном графе-цикле G на 40 вершинах случайно и равновероятно выбирается раскраска вершин в черный и белый цвета. Рассмотрим подграф H, состоящий из всех вершин белого цвета и всех ребер G между вершинами белого цвета. Найдите математическое ожидание числа компонент связности в графе H.

Решение. *Ответ*: $10 + \frac{1}{2^{40}}$.

Зададим ориентацию на ребрах графа G так, чтобы получить ориентированный цикл. Перенумеруем вершины графа по циклу от 1 до 40. После покраски, если в G есть хотя бы одна черная вершина, то каждая компонента связности H представляет собой ориентированный путь. У каждого такого пути есть ровно один конец, так что число компонент связности в этом случае совпадает с числом концов этих компонент. Если черных вершин в G нет, то $H = G$ и единственная компонента связности является циклом.

Для каждого $i = 1, \dots, 40$ заведем случайную величину X_i, которая равна 1, если i-ая вершина является концом пути белого цвета, и равна 0 иначе. Также заведем случайную величину , которая равна 1, если H является циклом, и равна 0 иначе. Обозначим через X матожидание числа компонент в графе. Тогда получаем $X = Y + \sum_{i=1}^{40} X_i$. Следовательно по линейности матожидания $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] + \sum_{i=1}^{40} \mathrm{E}[X_i]$.

Вероятность того, что $Y = 1$, равна $\frac{1}{2^{40}}$ (всего раскрасок 2^{40}, годится среди них только одна). Таким образом $\mathrm{E}[Y] = 0 \cdot \Pr[Y = 0] + 1 \cdot \Pr[Y = 1] = \frac{1}{2^{40}}$.

Для всех i для того, чтобы X_i равнялась 1 нужно, чтобы вершина i была белого цвета, а вершина $i+1$ была черного цвета. Вероятность этого равна $\frac{2^{38}}{2^{40}} = \frac{1}{4}$ (всего раскрасок 2^{40}, подходящих раскрасок 2^{38}, поскольку цвета двух вершин уже зафиксированы). Таким образом $\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{4}$ и $\mathrm{E}[X_i] = 0 \cdot \Pr[X_i = 0] + 1 \cdot \Pr[X_i = 1] = \frac{1}{4}$.

В итоге получаем, что $\mathrm{E}[X] = 40 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{40}} = 10 + \frac{1}{2^{40}}$.