

Неделя 23. Коды, исправляющие ошибки-2

1. Укажите необходимое и достаточное условие того, что матрица $A \in \{0, 1\}^{n \times k}$ является проверочной матрицей некоторого линейного кода, исправляющего не менее одной ошибки.
2. а) Для всякого n найдите линейный код размерности $2^n - n - 1$, длины $2^n - 1$, исправляющий одну ошибку. б) Как эффективно исправлять ошибки в этом коде?
3. Сколько непересекающихся шаров радиуса 1 можно поместить в булевом кубе размерности 7?
4. Докажите, что всякий линейный код можно преобразовать в систематический.
5. Докажите, что для любого кода $F: \Sigma^k \rightarrow \Sigma^n$ выполняется неравенство

$$d \leq n - k + 1.$$

6. Докажите, что для всякого $\varepsilon > 1/2$ количество точек в $\{0, 1\}^n$, попарные расстояния между которыми не меньше εn , не больше

$$\frac{1}{2\varepsilon - 1} + 1.$$

(Подсказка: перейдите к множеству $\{-1, 1\}^n$ и рассмотрите на нем стандартное скалярное произведение над \mathbb{R} .)

7. Докажите, что если в системе векторов в евклидовом пространстве между любыми двумя векторами угол тупой, то после удаления любого вектора получается линейно независимая система векторов.
8. Докажите, что если набор ненулевых векторов в \mathbb{R}^n образует попарно не острые углы, то их не больше $2n$.
9. Пусть есть код с параметрами n, k, d и $q = 2$. Докажите, что выполняется неравенство

$$2d \leq n - k + O(\log n).$$