Дискретная математика **Пилотный поток**

Неделя 22. Коды, исправляющие ошибки

1. (**Граница Хэмминга.**) Докажите, что если существует код с параметрами n, k, d, q, то

$$q^k V_q(e,n) \leqslant q^n$$

2. (**Граница Гилберта.**) Докажите, что если выполняется неравенство

$$(q^k - 1)V_q(2e,n) < q^n,$$

то существует код с параметрами n, k, d, q.

3. Докажите, что для $r \leqslant \frac{n}{2}$ верно

$$V_2(r,n) = \mathrm{poly}(n) \cdot 2^{nH(\frac{r}{n})},$$

где $H(p) = p\log\frac{1}{p} + (1-p)\log\frac{1}{1-p}$ для $0 \leqslant p \leqslant 1$.

4. Найдите экстремумы, точки перегиба, интервалы роста и выпуклости функции $H(p)$.

5. Пусть $f\colon \{0,1\}^k \to \{0,1\}^n$ — линейный код. Докажите, что кодовое расстояние $d(f)$ равно $\min_{y\in f(\{0,1\}^n)} d(0,y)$.

6. (**Граница Варшамова-Гилберта.**) Докажите, что если выполняется неравенство

$$2^{k-1}V_2(2e,n) < 2^n,$$

то существует линейный код с параметрами n, k, d, q.

7. Рассмотрим линейный код с проверочной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдите параметры этого кода. Выпишите какую-нибудь порождающую матрицу для этого кода.

8. Сколько непересекающихся шаров радиуса 1 можно поместить в трехмерном булевом кубе?

9. Укажите необходимое и достаточное условие того, что матрица $A \in \{0,1\}^{n\times k}$ является проверочной матрицей некоторого линейного кода, исправляющего не менее одной ошибки.

10. а) Для всякого n найдите линейный код размерности $2^n - n - 1$, длины $2^n - 1$, исправляющий одну ошибку. **б)** Как эффективно исправлять ошибки в этом коде?

11. Сколько непересекающихся шаров радиуса 1 можно поместить в булевом кубе размерности 7?

12. Докажите, что всякий линейный код можно преобразовать в систематический.

13. Докажите, что для любого кода $F\colon \Sigma^k \to \Sigma^n$ выполняется неравенство

$$d \leqslant n - k + 1.$$

14. Докажите, что для всякого $\varepsilon > 1/2$ количество точек в $\{0,1\}^n$, попарные расстояния между которыми не меньше εn, не больше

$$\frac{1}{2\varepsilon - 1} + 1.$$

(**Подсказка:** перейдите к множеству $\{-1,1\}^n$ и рассмотрите на нем стандартное скалярное произведение над $\mathbb{R}$.)