**Неделя 21. Булевы схемы и выполнимость**

**1.** Докажите, что задача проверки по данным графу $G$ и данному числу $k$ наличия в $G$ независимого множества размера $k$ эффективно сводится к задаче выполнимости КНФ.

**2.** Рассмотрим следующую задачу: по данным числам $a_1, \ldots, a_n$ и числу $b$ (все в двоичной записи) проверить, существует ли подмножество $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, такое что $\sum_{i \in S} a_i = b$. Докажите, что эта задача эффективно сводится к задаче о выполнимости булевой схемы.

**3.** Пусть в 3-КНФ в каждый дизъюнкт входит ровно три различных переменных. Докажите, что в такой 3-КНФ всегда можно выполнить не менее $7/8$ доли всех дизъюнктов.

Булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется *монотонной*, если для всяких $x, y \in \{0,1\}^n$ верно

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y),$$

где векторы $x$ и $y$ сравниваются в покоординатном порядке. Булева схема называется монотонной, если в ней не используются отрицания, но наряду с переменными разрешается использовать константы 0 и 1.

**4.** Докажите, что монотонная схема вычисляет монотонную булеву функцию.

**5.** Докажите, что всякую монотонную булеву функцию можно вычислить монотонной булевой схемой.

**6.** Рассмотрим следующую модифицированную задачу проверки выполнимости: по данной 3-КНФ проверить, есть ли набор значений ее переменных, такой что в каждом дизъюнкте ровно один литерал принимает значение 1. **а)** Докажите, что эта задача эффективно сводится к задаче о выполнимости 3-КНФ. **б)** Докажите, что и наоборот, стандартная задача о выполнимости 3-КНФ эффективно сводится к модифицированной.

**7.** Рассмотрим следующую модифицированную задачу проверки выполнимости: по данной 3-КНФ проверить, есть ли набор значений ее переменных, такой что в каждом дизъюнкте не все литералы принимают одинаковое значение (другими словами, в каждом дизъюнкте встречается и 0, и 1). **а)** Докажите, что эта задача эффективно сводится к задаче о выполнимости 3-КНФ. **б)** Докажите, что и наоборот, стандартная задача о выполнимости 3-КНФ эффективно сводится к модифицированной.

**8.** Пусть в КНФ в каждом дизъюнкте не больше одной переменной, входящей без отрицания. Придумайте алгоритм, проверяющий выполнимость таких КНФ за полиномиальное время.

**9.** Придумайте алгоритм, проверяющий выполнимость 2-КНФ за полиномиальное время.

**10.** Докажите, что функция $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ не вычисляется булевой схемой размера меньше $3n - 3$.

**Дискретная математика** **Пилотный поток**

**Домашнее задание 21**

**1.** Пусть $f, g\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Введем обозначение $t(x) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$. Пусть для всякого $x \in \{0,1\}^n$ верно $t(x) \leqslant f(x) \vee g(x)$. Докажите, что $t(x) \leqslant f(x)$ для всех $x \in \{0,1\}^n$ или $t(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in \{0,1\}^n$.

**2.** Пусть в 3-КНФ в каждый дизъюнкт входит ровно три различных переменных. Какое минимальное число дизъюнктов должно быть в такой 3-КНФ, чтобы она была невыполнима?

**3.** Докажите, что всякую булеву формулу размера $s$ с $n$ переменными можно переделать в булеву формулу, в которой все отрицания применяются только к переменным, и при этом размер новой формулы не превышает $p(s, n)$, где $p$ – некоторый фиксированный полином.

**4.** Докажите, что всякую булеву схему размера $s$ с $n$ переменными можно переделать в булеву схему, в которой все отрицания применяются только к переменным, и при этом размер новой схемы не превышает $p(s, n)$, где $p$ – некоторый фиксированный полином.

**5.** Будем говорить, что булева переменная $x_i$ входит в два дизъюнкта в КНФ с разными знаками, если в один она входит с отрицанием, а в другой — без отрицания. Пусть в КНФ у любой пары дизъюнктов либо нет переменных, входящих в них с разными знаками, либо таких переменных не меньше двух. Докажите, что такая КНФ выполнима.