Неделя 19. Разрешающие деревья

1. Среди n камней есть один радиоактивный. Счётчиком Гейгера мы можем проверить для любой кучки камней, если ли среди них радиоактивный. За какое наименьшее количество проверок можно найти радиоактивный камень?

2. В клетках шахматной доски написали в каком-то порядке числа от 1 до 64, каждое по одному разу. Про любое множество клеток доски мы можем спросить, какие числа на них стоят, и нам выдают полный список. За какое наименьшее количество вопросов можно понять, где какие числа стоят?

3. а) Найдите среди n монет самую тяжелую и вторую по тяжести монету за $n + \log n + O(1)$ взвешиваний. **б)** Докажите, что нельзя найти самую тяжелую и вторую по тяжести монету из n монет за менее чем $n + \log n + \Omega(1)$ взвешиваний.

4. Вычисление булевой функции $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ в модели разрешающих деревьев происходит следующим образом: за один вопрос разрешается спросить значение одной из переменных, в конце нужно объявить значение функции. Сложность вычисления функции — наименьшее количество вопросов в адаптивном (вопрос может зависеть от предыдущих ответов) протоколе, вычисляющем функцию.

а) Найдите сложность вычисления суммы по модулю два $\bigoplus_i x_i$ в модели разрешающих деревьев.

б) Пусть $n = k + 2^k$, а функция $f(x_1, \ldots, x_k, y_0, \ldots, y_{2^k-1})$ равна y_x, где x — число, двоичная запись которого $x_1 \ldots x_k$. Докажите, что сложность вычисления f в модели разрешающих деревьев не превосходит $k + 1$.

в) Докажите, что сложность вычисления функции f из предыдущего пункта не меньше $k + 1$.

г) Докажите, что неадаптивный протокол, вычисляющий функцию f (список вопросов составляется заранее, до получения ответов), содержит не менее n вопросов.

5. Пусть противник загадал число от 1 до n, и мы можем задавать ему вопросы вида «меньше ли задуманное число данного конкретного числа». При этом противник может соврать, но противнику разрешается соврать в 1% случаев (мы должны заранее сообщить, сколько зададим вопросов, чтобы противник мог сосчитать 1% от этого числа). Докажите, что можно узнать загаданное число за $O(\log n)$ вопросов.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 19

1. Пусть числовой массив $a[1], \dots, a[n]$ строго унимодален. Это означает, что существует t, такое что

$$a[1] < a[2] < \dots < a[t] > a[t+1] > \dots > a[n-1] > a[n], \quad 1 \leqslant t \leqslant n.$$

Разрешается за один ход спросить значение одного элемента массива. Докажите, что можно найти значение максимального элемента $a[t]$ за не более $O(\log n)$ ходов.

2. Есть n монет, среди которых одна фальшивая. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. За одно взвешивание можно сравнить по весу любые две монеты. Докажите, что фальшивую монету можно найти за $\lfloor n/2 \rfloor$ взвешиваний.

3. Докажите, что в условиях предыдущей задачи для нахождения фальшивой монеты необходимо $\lfloor n/2 \rfloor$ взвешиваний.

4. Найдите сложность вычисления дизъюнкции $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$ в модели разрешающих деревьев.

5. Имеется n монет, среди которых одна фальшивая, и чашечные весы. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. На каждую чашку весов можно класть произвольное количество монет. Докажите, что фальшивую монету можно найти за $\log_3 n + O(1)$ взвешиваний.

6. Докажите, что в условиях предыдущей задачи для нахождения фальшивой монеты необходимо $\log_3 n + \Omega(1)$ взвешиваний.

7. Есть n монет разного веса. За одно взвешивание можно сравнить по весу любые две монеты. Найдите самую тяжёлую и самую лёгкую за $\frac{3}{2}n + O(1)$ взвешиваний.

8. Докажите, что в условиях предыдущей задачи нельзя найти среди n монет самую тяжелую и самую лёгкую монету за менее чем $\frac{3}{2}n + \Omega(1)$ взвешиваний.