Неделя 18. Комбинаторные игры

1. Шоколадка представляет собой прямоугольник 5×8, разделённый углублениями на 40 квадратиков. Двое по очереди разламывают её на части по углублениям: за один ход можно разломить любой из кусков (больший одного квадратика) на два. Кто не может сделать хода (все куски уже разломаны), проигрывает. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

2. На шахматную доску 8×8 двое по очереди ставят коней на поля, не находящиеся под боем ранее поставленных (все равно кем) коней. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

3. В строчку написано несколько минусов. Два игрока по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюс; выигрывает переправивший последний минус. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

4. Часы показывают полдень. Два игрока по очереди переводят часовую стрелку на два или три часа вперед. Если после хода игрока стрелка указывает на 6, он выиграл. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

5. Два игрока играют в крестики-нолики на поле размера 100×100. Первый игрок в свой ход может поставить крестик в любое свободное поле, а второй – нолик. Игрок выигрывает, если ему первому удается поставить пять своих символов в ряд. Докажите, что у второго игрока нет выигрышной стратегии.

6. Двое по очереди обводят цветными карандашами стороны клеток на клетчатой бумаге. Первый игрок обводит красным, второй – синим. За каждый ход можно обвести отрезок между соседними узлами сетки (составляющий сторону клетки), если этот отрезок ещё не обведён другим игроком. Докажите, что второй (синий) игрок может помешать первому образовать красную замкнутую линию.

7. Пунктирными линиями нарисован прямоугольник $n \times (n+1)$, разбитый на квадраты 1×1. Двое ходят по очереди: первый может обвести сплошной линией пунктирную сторону одного из квадратов, а второй может стереть пунктирную сторону. (Стирать сплошные стороны и обводить стёртые нельзя.) Первый игрок хочет соединить сплошными линиями какие-то две точки на противоположных коротких сторонах прямоугольника (а второй – помешать первому). У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

8. Отмечены точки в вершинах выпуклого n-угольника. Игроки по очереди соединяют точки отрезками так, чтобы у отрезков не было общих точек (даже концов). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Найдите функцию Шпрага–Гранди для $n \leqslant 10$. Кто выигрывает при $n = 10$?

9. Шоколадка представляет собой прямоугольник $m \times n$, поделенный углублением на единичные квадратики. Два игрока играют в следующую игру, делая ходы по очереди. На каждом ходу разрешается забрать один еще не взятый квадратик шоколадки, а также все еще не взятые квадратики, лежащие правее и выше (в пом числе квадратики, лежащие выше в том же столбце и правее в той же строке). Проигрывает тот, кто забирает последний квадратик. Для всех m и n укажите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 18

1. На столе лежит 64 спички. Два игрока по очереди могут взять от одной до пяти спичек. Кто не может сделать ход (спичек не осталось), проигрывает. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

2. Два игрока по очереди последовательно пишут 10 цифр слева направо. Первый игрок выигрывает, если полученное число не делится на 7. В противном случае выигрывает второй игрок. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

3. На доске написано число 60. За один ход разрешается уменьшить число на любой из его целых положительных делителей (в том числе на единицу или на само это число). Если при этом получается нуль, игрок проиграл. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

4. По кругу написано n минусов. Два игрока по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюс; выигрывает переправивший последний минус. При каких n у первого игрока есть выигрышная стратегия?

5. Дан правильный n-угольник. Игроки по очереди проводят в нём диагонали, не пересекая проведённых ранее во внутренних точках. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает (это случится, когда многоугольник будет разрезан на треугольники). При каких n у первого игрока есть выигрышная стратегия?

6. Игроки по очереди красят ребра полного графа на $n \geqslant 2$ вершинах в красный (первый игрок) и синий (второй игрок) цвета. Красить ребро, которое уже покрашено в другой цвет, запрещено. Игрок выигрывает, если ребра его цвета задают на n вершинах связный граф. При каких n у первого игрока есть выигрышная стратегия?