**Дискретная математика** **Пилотный поток**

**Неделя 17. Производящие функции**

**1.** Найдите обратную к производящей функции

**а)**

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots;$$

**б)**

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots.$$

**2.** Найдите произведение следующих производящих функций:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots).$$

**3.** Пусть $F$ и $G$ — обратимые производящие функции. Докажите, что $(FG)^{-1} = F^{-1}G^{-1}$.

**4.** Пусть $A, B, C, D$ — обратимые производящие функции. Докажите равенство

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}.$$

**5.** Пусть $F$ и $G$ — производящие функции.

**а)** Докажите равенство $(FG)' = F'G + FG'$.

**б)** Докажите равенство $(F^{-1})' = -F'/F^2$.

**6.** Какие производящие функции обратимы, то есть для каких производящих функций $f$ существует производящая функция $g$, такая что $f \cdot g = 1$?

**7.** Пусть $a_n$ — число решений уравнения

$$x_1 + \ldots + x_k = n$$

в целых неотрицательных числах. Пусть $F(x)$ — производящая функция для последовательности $a_n$. Докажите, что $F(x) = (1 - x)^{-k}$.

**8.** С помощью производящих функций найдите сумму $\sum_{i=0}^{n} i^3$.

Для произвольного действительного $\alpha$ и целого положительного $k$ определим

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}{k \cdot (k - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}.$$

**9.** Докажите, что для всех неотрицательных $n$ верно **а)** $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$; **б)** $(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$.

**10.** Выразите производящие функции следующих последовательностей в виде отношения многочленов:

**а)** $a_n = \binom{n+m}{m}$;

**б)** $a_n = \binom{n}{m}$.

**11.** Докажите, что производящая функция $F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots$ представима в виде отношения двух многочленов тогда и только тогда, когда для некоторого $k$ существуют числа $a_1, \ldots, a_k$ и многочлены $p_1(n), \ldots, p_k(n)$, такие что для всех достаточно больших $n$ выполняется

$$f_n = p_1(n) a_1^n + \ldots + p_k(n) a_k^n.$$

**Дискретная математика** **Пилотный поток**

## Домашнее задание 17

**1.** Пусть $F$ и $G$ — производящие функции. Докажите равенство $(F/G)' = (F'G - FG')/G^2$.

**2.** Рассмотрим класс производящих функций, у которых коэффициент при $x^0$ равен нулю. Для каких производящих функций $F(x) = f_1x + f_2x^2 + \ldots$ из этого класса существует производящая функция $G(x)$ из этого класса, такая что $F(G(x)) = x$?

**3.** Вычислите сумму $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$.

**4.** Найдите и докажите формулу для суммы

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1) \cdot n.$$

**5.** Рассмотрим всевозможные непустые подмножества из множества чисел $1, 2, 3, \ldots, 100$. Для каждого подмножества рассмотрим величину, обратную к произведению всех его чисел. Найдите сумму всех таких обратных величин.

**6.** Пусть у нас есть неограниченное количество монет по 2 и 5 рублей, а также 4 монеты по 1 рублю. Обозначим через $a_n$ число способов набрать $n$ рублей с помощью имеющихся монет (монеты одинакового достоинства считаются одинаковыми). Выразите производящую функцию для последовательности $a_n$ в виде отношения многочленов.