

Неделя 16. Числа-2

1. Сформулируйте и докажите признак делимости **а)** на 9; **б)** на 11. (В десятичной системе счисления.)
2. Сформулируйте и докажите признак делимости на 17 в 16-ичной системе счисления.
3. Найдите остаток при делении числа $\underbrace{111 \dots 111}_{105 \text{ цифр}}$ на 107. (Использована десятичная система.)
4. Докажите, что при любом целом a число $a^{73} - a$ делится на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$.
5. Если от некоторого трёхзначного числа отнять 6, то оно разделится на 7, если отнять 7, то оно разделится на 8, а если отнять 8, то оно разделится на 9. Найдите это число.
6. Решите систему сравнений

$$x \equiv 3 \pmod{13},$$

$$x \equiv 4 \pmod{14},$$

$$x \equiv 5 \pmod{15}.$$

7. Решите систему сравнений

$$x \equiv 3 \pmod{15},$$

$$x \equiv 4 \pmod{21},$$

$$x \equiv 5 \pmod{35}.$$

8. Найдите остатки от деления **а)** 19^{10} на 66; **б)** 19^{14} на 70; **в)** 17^9 на 48; **г)** $14^{14^{14}}$ на 100.

9. Решите уравнение **а)** $\varphi(x) = x/3$; **б)** $\varphi(x) = x/4$.

10. Докажите равенство $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ (суммирование по всем делителям числа n).

11. Докажите, что в любой арифметической прогрессии $a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$, составленной из натуральных чисел, есть бесконечно много членов, в разложении которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.

Домашнее задание 16

1. Докажите, что при любом нечетном n число $2^{n!} - 1$ делится на n .
2. Известно, что $a^{10} + b^{10} + c^{10} + d^{10} + e^{10} + f^{10}$ делится на 11. Докажите, что $abcdefe$ делится на 11^6 .
3. Найдите остаток от деления $7^{7^{7^7}}$ на 17.
4. Решите сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod{200}$.
5. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на $\dots 0001$ в десятичной записи?
6. Докажите, что при любом k существует ровно 4 решения сравнения $x^2 \equiv x \pmod{10^k}$. В качестве решений рассматриваются вычеты по модулю 10^k .