

Неделя 14. Вероятность-3

1. Каждый элемент n -элементного множества с вероятностью p независимо от других включается в множество S_p . Найдите математическое ожидание числа элементов в множестве S_p .
2. а) Выбирается случайное подмножество двоичных строк длины n . (Все подмножества равновероятны.) Найдите математическое ожидание суммарного числа единиц в строках этого подмножества.
б) Тот же вопрос, но выбирается случайное подмножество, в котором ровно k строк.
3. Студент за выполнение домашней работы получает оценку от 1 до 10. Средняя оценка за серию домашних работ оказалась равной 6. Докажите, что доля работ, оценка за которые меньше 4, не превосходит $4/7$.
4. (Дисперсия) Пусть X – случайная величина. Докажите, что

$$E[X^2] - (E[X])^2 = E[(X - E[X])^2].$$

Величина $E[X^2] - (E[X])^2$ называется *дисперсией* случайной величины X .

5. (Неравенство Чебышева) Для случайной величины X обозначим $M = E[X]$, $D = E[X^2] - (E[X])^2$. Докажите, что

$$\Pr[|X - M| \geq a] \leq \frac{D}{a^2}.$$

6. Вероятностное пространство состоит из двоичных строк длины n , все строки равновозможны. Докажите, что вероятность события «количество единиц в строке отличается от $n/2$ не меньше, чем на \sqrt{n} » не превосходит $1/4$.
7. В неориентированном графе без петель и кратных ребер n вершин и $nd/2$ рёбер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geq 1$. Докажите, что найдется такой циклический обход вершин графа $(v_1 v_2 \dots v_n)$, в котором каждая вершина встречается ровно один раз и более $d/2$ из n пар (v_1, v_2) , (v_2, v_3) , \dots , (v_{n-1}, v_n) , (v_n, v_1) являются ребрами графа.
8. По таблицам смертности, составленным в 1693 г. Э. Галлеем, средняя продолжительность жизни была 26 лет. При этом вероятность прожить не больше 8 лет была $1/2$. Какова была средняя продолжительность жизни тех людей, которые прожили больше 8 лет? (Укажите интервал возможных при данных условиях значений.)
9. Рассмотрим последовательность a_0, a_1, \dots, a_n , где каждое $a_i \in \{0, 1\}^n$ – последовательность нулей и единиц длины n . Последовательность строится следующим образом. Первый член последовательности $a_0 = (0, 0, \dots, 0)$ – последовательность из одних нулей. Каждый следующий член a_{i+1} получается из a_i заменой значения одной случайно выбранной координаты на противоположное. Рассмотрим случайную величину X – количество единиц в последовательности a_n . Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X]/n$.

Домашнее задание 14

1. В лотерее на выигрыши уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть 5000 рублей (или больше) меньше 1%.
2. Про неотрицательную случайную величину X известно, что $\Pr[X < 5] = 1/2$ и $\Pr[X \geq 5] = 1/2$. Найдите все возможные значения математического ожидания $E[X]$.
3. Выбирается случайно и равномерно 10 различных чисел из множества целых чисел от 0 до 29. Найдите математическое ожидание суммы этих чисел.
4. Выбирается случайное слово длины 20 в алфавите $\{a, b\}$ (все слова равновозможны). Найдите математическое ожидание числа подслов ab в этом слове.
5. Пусть X — случайная величина. Известно, что $E[2^X] = 5$. Докажите, что

$$\Pr[X \geq 6] < 1/10.$$

6. Пусть f — случайная функция из n -элементного множества в $100n$ -элементное. Докажите, что

$$\Pr[f \text{ инъективная}] \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

7. В неориентированном графе без петель и кратных ребер графе n вершин и $nd/2$ рёбер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geq 1$. Докажите, что в графе есть независимое множество размера не меньше $n/2d$.

Подсказка. В решении этой задачи поможет случайное множество V_p , в которое каждая вершина входит с вероятностью p независимо от других вершин. (При подходящем значении параметра p .)