Дискретная математика **Пилотный поток**

Неделя 11. Графы-3

1. Пусть M — паросочетание в двудольном графе G. Докажите, что если M содержит меньше ребер, чем какое-то другое паросочетание в G, то в G есть увеличивающий путь относительно M.

2. Докажите, что S — вершинное покрытие в неориентированном графе $G = (V, E)$ тогда и только тогда, когда $V \setminus S$ — независимое множество.

3. Пусть в семействе подмножеств $S_1, \ldots, S_k$ n-элементного множества все подмножества S_i содержат ровно r элементов, и всякий элемент содержится в одном и том же числе d множеств семейства. Пусть $k \leqslant n$. Докажите, что в этом семействе есть система различных представителей.

4. Пусть в семействе множеств $S_1, \ldots, S_k$ все множества содержат не меньше r элементов, и всякий элемент содержится в не более чем r множествах. Докажите, что в этом семействе есть система различных представителей.

5. Магический квадрат размера $n \times n$ — это матрица размера $n \times n$, в которой расставлены числа $1, \ldots, n$ так что в каждой строке и в каждом столбце все числа встречаются ровно 1 раз. Пусть дана матрица, в которой заполнены первые k строк с соблюдением правил. Докажите, что ее можно заполнить до конца.

6. Теорема Биркгофа. Матрица $A = \{a_{ij}\}$ размера $n \times n$ с $a_{ij} \geqslant 0$ называется *дважды стохастической*, если сумма ячеек в каждом столбце и в каждой строке равна 1. Докажите, что всякая дважды-стохастическая матрица раскладывается в линейную комбинацию матриц перестановок с неотрицательными коэффициентами.

7. Выведите теорему Кёнига из теоремы Дилуорса.

8. Выведите теорему Холла из теоремы Кёнига.

k-Фактором в неориентированном графе называется остовный регулярный подграф степени k.

9. Докажите, что регулярный неориентированный граф четной степени $2k$ содержит 2-фактор.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 11

1. Пусть M и M' два паросочетания в двудольном графе $G = (A, B, E)$. Пусть все вершины подмножества $S \subseteq A$ покрываются M, а все вершины подмножества $T \subseteq B$ покрываются M'. Докажите, что в G есть паросочетание, покрывающее все вершины из $S \cup T$.

2. Пусть в двудольном графе G с l ребрами максимальная степень вершины равна d. Докажите, что в G есть паросочетание размера не меньше l/d.

3. Пусть в семейство множеств $S_1, \ldots, S_k$ удовлетворяет условию теоремы Холла и для некоторого $l < k$ верно, что $S_1 \cup \ldots \cup S_l$ содержит ровно l элементов. Докажите, что никакой из оставшихся множеств не содержится в этом объединении целиком.

4. Пусть A — n элементное множество. Докажите, что для всякого $k \leqslant \frac{n-1}{2}$ можно расширить каждое k-элементное подмножество до $(k+1)$-элементного (добавив один элемент) так, что все полученные $(k+1)$-элементные подмножества будут различны.

5. Докажите, что ребра двудольного графа G, степени вершин которого не больше d, можно разбить в не более чем d паросочетаний (паросочетания не должны пересекаться по ребрам).

6. Сдача этой задачи продлена на вторую неделю. Пусть A — конечное множество и k — целое положительное число. Пусть $A_1, \ldots, A_p$ и $B_1, \ldots, B_p$ — два разбиения A на подмножества размера k. Докажите, что существует набор элементов $a_1, \ldots, a_p$, образующих систему различных представителей как для $A_1, \ldots, A_p$, так и для $B_1, \ldots, B_p$, то есть $a_1, \ldots, a_p$ попарно различны, для всякого i верно $a_i \in A_i$ и существует перестановка $(j_1, \ldots, j_n)$, такая что для всякого i верно $a_{j_i} \in B_i$.

7. Пусть $G = (A, B, E)$ двудольный граф на счетных множествах A и B. Пусть для всякого конечного подмножества $S \subseteq A$ верно $|N(S)| \geqslant |S|$, где $N(S)$ — множество соседей вершин из S. Можно ли утверждать, что в G есть паросочетание, покрывающее все множество A?