Дискретная математика, пилотный поток. **Решения задач экзамена 24.12.16**

1. Пусть A — некоторое множество и $f\colon A \to A$ — всюду определенная функция на нем. Верно ли, что если $f(A) \neq A$, то f не является инъекцией? Если верно, то докажите это; если неверно, приведите контрпример.

Решение. *Ответ*: неверно.

Рассмотрим $A = \mathbb{N}$ (натуральные числа начинаются с нуля) и рассмотрим $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такую, что $f(n) = n + 1$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Тогда видно, что с одной стороны $f(\mathbb{N}) = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\} \neq \mathbb{N}$, а с другой стороны функция f является инъекцией: если $f(n) = n + 1 = k + 1 = f(k)$, то $n = k$.

2. Сколькими способами можно переставить числа $1, \ldots, 7$ так, что существует только один “локальный максимум”, т.е. только одно из чисел больше своих соседей (сосед один, если число с краю, и соседей два в противном случае). Ответ в задаче должен быть дан в виде числа в десятичной записи.

Решение. *Ответ*: 64.

Число 7 является самым большим в перестановке, в частности, оно всегда больше своих соседей и является локальным максимум. Требуется посчитать количество перестановок, в которых нет других локальных максимумов.

Если зафиксировать множество $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 6\}$ тех чисел, которые идут в перестановке до числа 7, то ясно, что среди них нет локального максимума тогда и только тогда, когда они упорядочены по возрастанию. Таким образом, их можно расставить единственным способом. После числа 7 в этой ситуации должны быть выписаны все оставшиеся числа $\{1, \ldots, 6\} \setminus S$ и среди них нет локального максимума тогда и только тогда, когда они упорядочены по убыванию. Таким образом, как только множество S выбрано, числа можно расставить единственным образом, и мы установили взаимнооднозначное соответствие между перестановками, которые мы должны посчитать, и подмножествами множества $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Как обсуждалось на лекциях, число таких подмножеств равно $2^6 = 64$, а значит и искомое число тоже равно 64.

3. Случайно, независимо и равновероятно выбираются две последовательности $a = (a_1, \ldots, a_{100})$ и $b = (b_1, \ldots, b_{100})$ из нулей и единиц. Найдите математическое ожидание числа позиций, в которых эти последовательности различаются.

Решение. *Ответ*: 50.

Обозначим через X случайную величину, равную числу позиций, в которых a и b различаются. Введем также случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$. Случайная величина X_i равна 1 тогда и только тогда, когда $a_i = b_i$. Нетрудно видеть, что $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$.

Найдем математическое ожидание случайной величины X_i. Заметим, что вероятность $\Pr[X_i = 1] = 1/2$. Действительно, всего исходов в нашем вероятностном пространстве $2^n \cdot 2^n = 2^{2n}$ (каждую из последовательностей a и b можно выбрать 2^n способами). Число исходов, при которых $X_i = 1$, равно $2 \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 2^{2n-1}$ (двумя способами можно выбрать значение совпадающих координат $a_i = b_i$, остальные координаты можно выбрать 2^{n-1} способами в каждой строке). Таким образом

$$\Pr[X_i = 1] = \frac{2^{2n-1}}{2^{2n}} = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{E}[X_i] = \Pr[X_i = 0] \cdot 0 + \Pr[X_i = 1] \cdot 1 = 1/2$$

и по линейности матожидания

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X_1 + \ldots + X_{100}] = \mathrm{E}[X_1] + \ldots + \mathrm{E}[X_{100}] = \frac{100}{2} = 50.$$

4. Существуют ли такие множество A и отношение $R \subseteq A \times A$, что $R \circ R = \emptyset$, а $R \circ (R \circ R) \neq \emptyset$?

Решение. *Ответ*: нет.

Обозначим $R \circ R$ через S. Тогда нам известно, что $S = \emptyset$. Докажем, что в этом случае $R \circ S$ также пусто. По определению композиции отношений $(a, b) \in R \circ S$ тогда и только тогда, когда существует $c \in A$, для которого выполняется $(a, c) \in R$ и $(c, b) \in S$. Поскольку S пусто, то последнее включение не выполняется ни для какой пары (c, b), а значит никакая пара (a, b) не принадлежит $R \circ S$.

5. Какова мощность множества A таких бесконечных последовательностей из нулей и единиц $a_1, a_2, a_3, \ldots$, что для всякого $i \geq 3$ верно хотя бы одно из трех: $a_i = a_{i-1} \wedge a_{i-2}$, $a_i = a_{i-1} \vee a_{i-2}$ и $a_i = a_{i-1} \oplus a_{i-2}$?

Решение. *Ответ*: это множество континуально.

Указанное множество A очевидно вкладывается в континуальное множество всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц.

Построим вложение в обратную сторону. Для этого докажем, что в множестве A содержится множество B всех последовательностей такого вида: на первых двух позициях стоят числа 1 и 0, а в оставшейся части последовательности нет трех единиц подряд и нет двух нулей подряд. Действительно, покажем, что для всякой последовательности из B выполняется условие принадлежности множеству A. Пусть $b = (b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ – произвольная последовательность из B и b_n произвольный ее элемент при $n \geq 3$. Если $b_n = 0$, то ясно, что его можно получить по одной из формул $b_n = b_{n-1} \wedge b_{n-2}$ или $b_n = b_{n-1} \oplus b_{n-2}$ (если оба предыдущих бита 1, применяем вторую формулу, в противном случае — первую). Если $b_n = 1$, то по условию принадлежности последовательности B среди двух предыдущих битов есть хотя бы одна единица. Тогда $b_n = b_{n-1} \vee b_{n-2}$.

Теперь построим инъекцию из множества всех двоичных последовательностей в множество B. Пусть дана произвольная двоичная последовательность $a_1, \ldots, a_n, \ldots$. Построим соответствующую последовательность из B индуктивно. На первых двух позициях последовательности стоят числа 1 и 0. Если $a_1 = 0$, приписываем к последовательности 01, а если $a_1 = 1$, приписываем 011. Для каждого очередного элемента a_i, если $a_i = 0$, также приписываем к последовательности 01, иначе приписываем 011. Нетрудно видеть, что получившаяся последовательность принадлежит B, и что разным двоичным последовательностям эта конструкция ставит в соответствие разные последовательности из B. Таким образом, мы построили инъекцию из множества всех двоичных последовательностей в множество B, а значит и в множество A.

Две указанные инъекции в сочетании с теоремой Кантора-Бернштейна показывают, что множество A континуально.

6. Приведите пример такого вероятностного пространства и событий A, B, C в нём, что любые два события из трёх образуют пару независимых событий, но

$$\Pr[A \cap B \cap C] \neq \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C].$$

Решение.

Вероятностное пространство $U = \{(a_1, a_2, a_3) \in \{0,1\}^3 \mid a_1 + a_2 + a_3 — \text{четно}\}$ с равновероятным распределением. Событие A — на первой позиции стоит 1, событие B — на второй позиции стоит

1, событие C — на третьей позиции стоит 1. Нетрудно видеть, что $|U| = 4$, $|A| = |B| = |C| = 2$, $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1$, $|A \cap B \cap C| = 0$. Следовательно, $\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[C] = 1/2$, $\Pr[A \cap B] = \Pr[A \cap C] = \Pr[B \cap C] = 1/4$, $\Pr[A \cap B \cap C] = 0$. Видно, что для любой пары событий из A, B, C условие независимости выполняется, но при этом $\Pr[A \cap B \cap C] \neq \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C]$.

7. Рассмотрим единичный квадрат $[0,1]^2$ с покоординатным частичным порядком ($(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$, если $x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$) и единичный куб $[0,1]^3$ с покоординатным частичным порядком. Изоморфны ли эти упорядоченные множества?

Решение. *Ответ*: нет.

Предположим, что есть изоморфизм f из $A = [0,1]^3$ в $B = [0,1]^2$ (с указанными порядками). Как обсуждалось на лекциях, отрезки A при таком изоморфизме должны переходить в отрезки B, то есть всякий отрезок A изоморфно отображается в некоторый отрезок B. Нетрудно видеть также, что линейный порядки при изоморфизме переходят в линейные порядки.

Рассмотрим множество A и изучим, для каких его отрезков, индуцированный на них порядок является линейным. Рассмотрим две точки $a = (a_1, a_2, a_3)$ и $b = (b_1, b_2, b_3)$ в множестве A, такие что $a_1 \leq b_1$, $a_2, \leq b_2$ и $a_3 \leq b_3$. Обозначим через $[a, b]$ отрезок от a до b в множестве A, то есть упорядоченное множество всех точек c в A, таких что $a \leq c \leq b$. Если a и b отличаются хотя бы в двух координатах, то отрезок $[a, b]$ не является линейно упорядоченным множеством. Действительно, пусть для определенности $a_1 \neq b_1$ и $a_2 \neq b_2$. Тогда точки (a_1, b_2, a_3) и (b_1, a_2, a_3) обе лежат в отрезке $[a, b]$ и при этом не сравнимы. Если же a и b отличаются только в одной координате, то отрезок $[a, b]$ линейно упорядочен. Действительно, пусть для определенности $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$. Тогда все точки отрезка $[a, b]$ отличаются только в третьей координате, а значит сравнимы друг с другом.

Полностью аналогично можно показать, что отрезок $[a, b]$ в множестве B линейно упорядочен тогда и только тогда, когда a и b различаются только в одной координате.

Рассмотрим теперь точки $e = (0, 0, 0)$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ и $e_3 = (0, 0, 1)$ в множестве A и рассмотрим их образы $f(e)$, $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$. Точка e является наименьшим элементом в A, а значит по доказанному на лекциях переходит в наименьший элемент B, точку $(0, 0)$. Точки e_1, e_2 и e_3 попарно несравнимы, а значит и $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ попарно несравнимы. Отрезки $[e, e_i]$ линейно упорядочены для всех $i = 1, 2, 3$. Следовательно, и отрезки $[f(e), f(e_i)]$ линейно упорядоченны для всех $i = 1, 2, 3$. По обсуждению выше получается, что точки $f(e_1)$, $f(e_2)$ и $f(e_3)$ отличаются от $(0, 0)$ только в одной координате каждая, то есть имеют по одной ненулевой координате. Поскольку всего координат две, то хотя бы две из трех точек $f(e_1)$, $f(e_2)$ и $f(e_3)$ сравнимы и мы приходим к противоречию.

8. На ребрах простого неориентированного графа расставлены числа "$+1$"и "-1"(на каждом ребре ровно одно число). Знаком цикла называется произведение чисел, написанных на входящих в него ребрах. Докажите, что для любого связного графа, не являющегося деревом, можно расставить знаки на ребрах так, чтобы сумма знаков всех его простых циклов была отрицательна.

Решение.

Рассмотрим произвольный связный граф G, не являющийся деревом, и расставим числа на его ребрах случайно и равновероятно. Пусть X – случайная величина, равная сумме знаков всех простых циклов. Докажем, что $\mathrm{E}[X] = 0$. Заведем для всех циклов отдельные случайные величины: $X_1, \ldots, X_k$ (k — количество простых циклов в графе G). Случайная величина X_i равна знаку i-го цикла, то есть принимает значения ± 1. Заметим, что $X = X_1 + \ldots + X_k$.

Заметим, что для всякого i верно $E[X_i] = 0$. Действительно, покажем, что $\Pr[X_i = 1] = \Pr[X_i = -1] = 1/2$. Для этого выберем произвольное ребро e в i-ом цикле и разобьем все элементарные исходы на пары. В парных исходах числа на всех ребрах совпадают, кроме числа на ребра e, которое в парных исходах противоположно. Тогда на одном из парных исходов знак i-го цикла равен 1, а на другом — -1. Значит знак цикла равен 1 ровно на одном исходе в каждой паре, а значит ровно на половине исходов. Это и означает, что $\Pr[X_i = 1] = \Pr[X_i = -1] = 1/2$.

По линейности матожидания получаем, что

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X_1 + \ldots + X_k] = \mathrm{E}[X_1] + \ldots + \mathrm{E}[X_k] = 0.$$

Заметим теперь, что существует исход, для которого $X > 0$, а именно, тот исход, в котором всем ребрам приписано число 1 (граф связен и не является деревом, так что хотя бы один цикл в нем есть). Обозначим через $a_1, \ldots, a_m$ всевозможные значения случайной величины X, которые она принимает с положительными вероятностями $p_1, \ldots, p_m$ соответственно. По определению математического ожидания получаем

$$\mathrm{E}[X] = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_m p_m = 0,$$

при этом $p_1, \ldots, p_m > 0$ и известно, что одно из чисел $a_1, \ldots, a_m$ положительно. Следовательно есть i, для которого $a_i < 0$. То есть, существует исход, для которого сумма знаков всех ребер отрицательна.

Набросок комбинаторного решения. У этой задачи есть и конструктивное комбинаторное решение. Приведем его набросок.

Для начала рассмотрим остовное дерево графа и припишем его ребрам числа произвольным образом. Далее будем добавлять ребра графа в остовное дерево по очереди одно за другим. Каждый раз добавленному ребру будем присваивать знак так, чтобы не меньше половины циклов, которые добавляются вместе с этим ребром, имели отрицательный знак. Это дает неположительную сумму знаков. Чтобы увидеть, что сумма на самом деле отрицательная, достаточно заметить, что при добавлении первого ребра добавляется только один цикл, знак которого мы сделаем отрицательным.